Münster i. W. 1927 No. 16 Phil. Diss

Angewandte Mathematik

Die Gaußsche konforme Projektion in Anwendung bei deutschen Landesvermessungen

---

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
der Philosophischen und Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster i. W.

vorgelegt von

Heinrich Röhrs
aus Drebber

Universitätsverlag von Robert Noske in Borna-Leipzig
1927

Dekan: Professor Dr. v. Salis
Referent: Professor Schewior
Korreferent: Professor Dr. R. König

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juli 1927

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Meinem Vater!

Inhalt.

Seite

1. Einleitung 1
   a) Vorbemerkungen.
   b) Aufgaben der Projektion einer Landesvermessung.
   c) Die zeitige Lösung dieser Aufgabe.
   d) Soldnersche Koordinaten.
   e) Gaußsche konforme Koordinaten.
2. Die Abbildungsgleichungen der Gaußschen konformen Projektion . 16
   a) Ebene Flächen.
   b) Koordinatenumformung und Einordnung.
   c) Rotationsflächen.
3. Über die Anwendung konformer Abbildungen bei deutschen Landesvermessungen 26
   a) Die Hannoversche Landesvermessung 1821—1844.
   b) Die Kegelprojektion des Märkischen Dreiecksnetzes der Preußischen Landesaufnahme 1873—1876.
   c) Die konforme Doppelprojektion der Preußischen Landesaufnahme.
   d) Die konforme Kegelprojektion der Mecklenburgischen Landesvermessung.
   e) Die Gauß-Krügersche Meridionalstreifenprojektion (Einheitssystem).
   f) Die Lösung geodätischer Aufgaben.
4. Vergleichende Untersuchungen über rechtwinklige konforme Koordinaten 43
   a) Längen- und Flächenverzerrung.
   b) Einfluß der Projektion auf die Punktbestimmung.
   c) Einführung eines Vergrößerungsfaktors m_0 für den Anfangsmeridian.
5. Schlußbemerkungen 57
6. Anhang (Numerisches Beispiel einer Koordinatenumformung mittels konformer Projektion) 60

Die den geodätisch wichtigsten Bestimmungsgrößen einheitlich zugeordneten Bezeichnungen sind aus nachstehender Tabelle ersichtlich:

Bestimmungsgrößen / Bezugsflächen	Geographische Koordinaten		Rechtwinklige Koordinaten			Polar-Koordinaten		Strecke
	Breite (Kompl.)	Länge	Abszisse	Ordinate	Azimut	Radiusvektor	Anomalie	
Sphäroid	φ (γ)	λ						s
Kugel	B (δ)	L	x	y	T			S
Kegel			ξ	η		ϱ	α	σ
			Ursprg.: Spitze					
Ebene			$\mathfrak{x}$	$\mathfrak{y}$	t			$\mathfrak{S}$

Literatur.

1. Über Kartenprojektion, Abhandlungen von Lagrange (1779) und Gauß (1822). Herausgegeben von A. Wangerin. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 55. Leipzig (Verlag von Wilhelm Engelmann) 1894. — („Über die Konstruktion geographischer Karten" von J. H. de Lagrange und „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird" von C. F. Gauß.)
2. Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie, von Carl Friedrich Gauß. Herausgegeben von J. Frischauf. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 177. Leipzig (Verlag von Wilhelm Engelmann) 1910.
3. Die mathematischen Grundlagen der Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids, von Univ.-Prof. Dr. J. Frischauf. Stuttgart (Verlag von Konrad Wittwer) 1913.
4. Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene, von Prof. Dr. L. Krüger, Abteilungsvorsteher im Preußischen Geodätischen Institut. Veröffentlichungen des Preußischen Geodätischen Instituts Neue Folge Nr. 52. Potsdam (Verlag B. G. Teubner in Leipzig) 1912.
5. Formeln zur konformen Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene, von Prof. Dr. L. Krüger, Geh. Regierungsrat. Herausgegeben von der Preuß. Landesaufnahme. Berlin (im Selbstverlag) 1919.
6. Theorie der Projektionsmethode der Hannoverschen Landesvermessung, von Oskar Schreiber, Hauptmann im Königl. Hannov. 1. Jägerbataillon. Hannover (Hahnsche Hofbuchhandlung) 1866.
7. Allgemeines Koordinatenverzeichnis als Ergebnis der Hannoverschen Landesvermessung aus den Jahren 1821 bis 1844, von Wittstein. Hannover (Druck von Wilh. Riemenschneider) 1868.
8. Das deutsche Vermessungswesen. Historisch-kritische Darstellung. Herausgegeben von Dr. W. Jordan und K. Steppe. Stuttgart (Verlag von Konrad Wittwer) 1882.

9. Die geodätischen Fixpunkte im Unterwesergebiet, von H. Geisler, Abhandlungen der Naturw. Vereinigung Bremen Bd. VIII Heft 1, 1882.

10. Anleitung zur Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Koordinaten der Dreieckspunkte, sowie der Dreiecksseiten und ihrer Richtungen, von Dr. Otto Börsch. Cassel (Georg Württemberger) 1868.

11. Handbuch der Vermessungskunde von Dr. W. Jordan. 2., umgearbeitete und vermehrte Auflage des Taschenbuchs der praktischen Geometrie. Bd. II: Höhere Geodäsie. Stuttgart (Metzlersche Buchhandlung) 1878.

12. Handbuch für Vermessungskunde von weil. Dr. W. Jordan. Fortgesetzt von weil. Dr. C. Reinhertz. Bd. II. 8. Aufl. Bearbeitet von Dr. O. Eggert. Stuttgart (Metzlersche Buchhandlung) 1914.

13. Lehrbuch der Landesvermessung von E. Hegemann, Prof. an der landw. Hochschule zu Berlin. Berlin (Verlag von Paul Parey) 1906.

14. Die trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen in der Feldmeßkunst. Bearbeitet von Dr. F. G. Gauß. Halle a. S. (Verlag von Eugen Strien) 1906.

15. Die Königlich Preußische Landestriangulation. Hauptdreiecke. Herausgegeben von der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme. Berlin (im Selbstverlag).

16. Rechnungsvorschriften für die trigonometrische Abteilung der Landesaufnahme. Im Selbstverlag. Zu beziehen durch E. S. Mittler & Sohn, Berlin, Kochstrasse 69/70.

17. Mitteilungen des Reichsamts für Landesaufnahme. Vierteljahrshefte. Verlag des Reichsamts für Landesaufnahme:

Jahrg. 1925 Nr. 4 S. 31 usw.: „Die Anwendung des Planzeigers für die Punktbestimmung auf neueren Karten des Reichsamts für Landesaufnahme". Von Dr. Th. Siewke.

Jahrg. 1926/27 Nr. 1 S. 8 usw.: „Neue Veröffentlichungen der Trigonometrischen Abteilung des Reichsamts für Landesaufnahme". — Nr. 3 S. 144: „Die topographische Grundkarte und die Pläne der Stadtvermessungsämter". Von Oberlandmesser Lips, Berlin-Cöpenick.

18. Einführung in die Funktionentheorie von Max Rose. (Sammlung Göschen Nr. 581.) Leipzig 1912.

19. Einführung in die konforme Abbildung von Dr. Ludwig Bieberbach. 2. Aufl. Berlin und Leipzig (Verlag Walter de Gruyter & Co.) 1927. (Sammlung Göschen Nr. 768.)

20. Abhandlungen in der Zeitschrift für Vermessungswesen, herausgegeben vom Deutschen Verein für Vermessungswesen. Stuttgart (Verlag Konrad Wittwer). (Z. f. V.):

Jahrg. 1876 S. 238 usw.: „Näherungsformeln für die Gaußsche Projektion der Hannoverschen Landesvermessung" von Helmert.

Jahrg. 1884 S. 293 usw.: „Tissots Untersuchungen über Kartenprojektion" von Prof. Dr. K. Zöppritz in Königsberg i. Pr.

Jahrg. 1892 S. 417 usw.: „Über die Projektion der Mecklenburgischen Landesvermessung und ihre Neubearbeitung durch Prof. Jordan" von Hammer. — S. 423 usw.: „Konforme Koordinaten für Landesvermessungen" von Jordan.

Jahrg. 1894 S. 169 usw.: „Rechtwinklige konforme Koordinaten" von Jordan. — S. 385 usw.: „Die Projektionsmethode der Trigonometrischen Abteilung der Königlich Preußischen Landesaufnahme" von Oberst-Lieutenant von Schmidt, Chef der trigonometrischen Abteilung der Landesaufnahme.

Jahrg. 1895 S. 337 usw.: „Die deutschen Koordinatensysteme" von Jordan. — S. 421 usw.: „Reduktion der Richtungswinkel und der Entfernung in der konformen Projektion" von Jordan.

Jahrg. 1896 S. 83 usw.: „Querachsige Koordinaten" von Jordan. — S. 101 usw.: „Konforme Abbildung" von Jordan. — S. 193 usw.: „Soldnersche oder Gaußsche Koordinaten" von Professor Koll. — S. 198 usw.: „Konforme Projektion I" von Jordan. — S. 199 usw.: „Soldnersche oder Gaußsche Koordinaten" von Professor Koll. — S. 249 usw.: „Der mittlere Verzerrungsfehler" von Jordan. — S. 257 usw.: „Vergleichung der Mecklenburgischen konformen Kegelprojektion mit der kongruenten Soldnerschen Projektion" von R. Vogeler. — S. 321 usw.: „Soldnersche oder Gaußsche Koordinaten" von Prof. Koll. — S. 327 usw.: „Die Konformität in Bayern" von Dr. Franke. — S. 333 usw.: „Zur Wahl der Art und Lage des Koordinatensystems einer Landesvermessung" von Vermessungskommissar Steiff. — S. 587 usw.: „Über die Entwickelung des deutschen Vermessungswesens im 19. Jahrhundert" von Professor Jordan.

Jahrg. 1897 S. 431 usw.: „Zur ebenen rechtwinkligen Abbildung der Soldnerschen Koordinaten" von A. Klingatsch.

Jahrg. 1899 S. 491 usw.: „Zur konformen Doppelprojektion der Königlich Preußischen Landesaufnahme" von Dr. O. Schreiber.

Jahrg. 1921 S. 673 usw.: „Grundformeln für die ebene konforme Abbildung sphärisch rechtwinkliger Koordinaten" von Eppstein.

Jahrg. 1922 S. 257 usw.: „Konforme Abbildung der ganzen Oberfläche der Kugel und des Sphäroids in der Ebene" von Frischauf.

Jahrg. 1922 S. 1 usw.: „Sphäroidische Korrektionsgrößen durch konforme Projektion auf die einhüllende Kugelschar mit parallelkreisförmiger Charakteristik“ von A. Berroth.

Jahrg. 1924 S. 245 usw.: „Zur Transformation ebener rechtwinkliger Koordinaten der konfornen Doppelprojektion“ von Hesse.

Jahrg. 1926 S. 97 usw.: „Der Zusammenschluß süddeutscher Dreiecksnetze mit den Dreiecksketten der preußischen Landesaufnahme zur Gewinnung einheitlicher geographischer Koordinaten“ von Clauß.

Jahrg. 1927 S. 321 usw.: Besprechung von Galle über Thilo: Anschluß der Mecklenburgischen Landesvermessung an das deutsche Einheitssystem.

21. Anschluß der Mecklenburgischen Landesvermessung an das deutsche Einheitssystem. Sonderheft 3 zu den Mitteilungen des R. f. L.-A. 1926.

22. Runderlaß des Finanzminst. vom 20. 4. 1927 betr. Änderungen der Bestimmungen über den Anschluß der Einzelmessungen an das Landesdreiecksnetz in Preußen (K.-V. 2. 1140). Veröffentlicht im Finanzministerialblatt, herausgegeben im Preuß. Finanzministerium (R. v. Deckers Verlag, Berlin), 11. Jahrg. Teil 1 Nr. 8 vom 30. IV. 1927 S. 312 usw.

23. Sitzungsberichte des Beirats für Vermessungswesen.

24. Die Verwendung rechtwinkliger sphärischer Koordinaten als ebene von Samel. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten Jahrg. 1923 S. 609. Verlag Reiß, Liebenwerda.

1.

Einleitung.

Die „Projektion einer Fläche“ ist im wesentlichen nichts anderes als die punktweise Übertragung dieser Fläche (des Urbildes) auf eine andere Fläche als Trägerin dieses Abbildes, wie sie in augenscheinlicher Nutzanwendung die kartographische Darstellung der Erdoberfläche gibt. Vollkommenste Lösung wäre hierbei die kongruente (oder durchaus ähnliche) Wiedergabe der durch die kürzesten Verbindungslinien gegebenen Flächengebilde auf der Urfläche (z. B. eines sphäroidischen, von geodätischen Linien gebildeten Dreiecknetzes) durch das entsprechende, auf nämliche Weise bestimmte Flächengebilde der abbildenden Fläche (z. B. durch das ebene, von Geraden gebildete Dreiecksnetz). Indessen ist leicht zu erkennen, daß eine solche Darstellungsmöglichkeit, durch die Natur der Flächen bedingt, an die Abbildung auf gleichgeartete Flächen oder an die Abbildung von Begrenzungsflächen solcher Körper, deren Oberflächen aufeinander abwickelbar sind, gebunden ist, daß in allen anderen Fällen jedoch zwischen Urbild und Abbild Verzerrungen unvermeidlich sein werden.

Damit wird die an Abbildungsaufgaben zu stellende Forderung auf die weitmöglichste Erhaltung gewisser Eigenschaften von Urbild und Abbild beschränkt.

Die Definition von allgemeinen Abbildungsarten wird wesentlich gefördert durch die Theorie affiner Flächen. Zwei ebene Flächengebilde heißen „affin“, wenn für die einander entsprechenden Punkte im Urbild und Abbild (P und P') die Beziehungen $x' = a \cdot x$ und $y' = b \cdot y$ statthaben, wobei x, y und x', y' die

Achsen beliebiger Parallel-Koordinatensysteme im Urbild bezw. Abbild bedeuten. Wird im Urbild ein rechtwinkliges Achsensystem (x, y) gewählt, dem im Abbild ein schiefwinkliges (x', y') mit dem Winkel γ entsprechen möge, dann ist das affine Abbild eines Kreises um den Ursprung $A: x^2 + y^2 - 1 = 0$ die Ellipse:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

wobei die Achsen a und b konjugierte Durchmesser darstellen.

Ein beliebiger Strahl $AP = 1$ mit der Neigung φ gegen die x-Achse wird affin abgebildet durch den Strahl

$$A'P' = \varrho = \sqrt{x'^2 + y'^2 + 2x'y'\cos\gamma}.$$

Mit $x = \cos\varphi$ und $y = \sin\varphi$ wird

$$\varrho^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + 2ab\cos\gamma\sin\varphi\cos\varphi.$$

Dieser Ausdruck wird:

zum Maximum für $\gamma = 0^0$, d. h. in Richtung der a-Ache,

zum Minimum für $\gamma = 90^0$, d. h. in Richtung der b-Achse.

Daraus folgt die hier interessierende Eigenschaft affiner ebener Flächengebilde:

Die den Halbachsen der Ellipse entsprechenden Halbmesser des Kreises stehen aufeinander senkrecht.

Man kann also durch den Punkt A zwei zueinander senkrechte Geraden ξ, η derart legen, daß für ihre Bildgeraden $\xi' \perp \eta'$ wird. Diese Geraden nennt man Hauptrichtungen. Ihre Lage und die Werte ihrer Streckenverhältnisse

$$\frac{\xi'}{\xi} = \lambda_0; \quad \frac{\eta'}{\eta} = \delta_0$$

kann man bestimmen, sobald man für zwei Geraden des Urbildes und ihrer Bildgeraden die von ihnen eingeschlossenen Winkel μ bezw. μ' und ihre Streckenverhältnisse λ_1 bezw. δ_1 kennt.

Erfüllen nun zwei affine Flächengebilde die Bedingung: $\lambda_0 = \delta_0$, dann sind die Gebilde einander ähnlich.

Wird der Bedingung $\lambda_0 \cdot \delta_0 = 1$ genügt, dann haben entsprechende Flächen gleiche Größe.

Und bestehen beide Gleichungen, d. h. es ist $\lambda_0 = \delta_0 = 1$, dann sind einander entsprechende Flächen kongruent.

In der Übertragung dieser Eigenschaften affiner Abbildung auf die allgemeinen Abbildungen bemerken wir zunächst, daß das Verhältnis eines Linienelements des Abbilds zu seinem Urbild das Vergrößerungsverhältnis heißt; man bezeichnet es nach Gauß mit m. Ist nun ein Punkt P durch seine Koordinaten (u, v) gegeben, dann kann man die von P und P' ausgehenden Linienelemente, ihre Vergrößerungsverhältnisse und die von ihnen eingeschlossenen Winkel als Funktionen von u und v bestimmen, und man erhält weiter die Hauptrichtungen und Vergrößerungsverhältnisse m_ξ und m_η ebenfalls als Funktionen von u und v. Abbildungen, die nun für alle Werte von u und v der Bedingung $m_\xi \cdot m_\eta = 1$ genügen, bilden die Flächen in gleicher Größe ab, man nennt sie flächentreue oder äquivalente Abbildungen. Solche, die für alle Werte von u und v die Gleichung $m_\xi = m_\eta = m$ erfüllen, bilden die Winkel eines Linienelements unverändert ab, d. h. sie haben Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen, man nennt sie winkeltreue oder nach Gauß konforme Abbildungen.

Durch die Flächengleichheit in den kleinsten Teilen wird auch Flächengleichheit in den endlichen Teilen bedingt; die Ähnlichkeit in den Differenzialgebilden führt dagegen nur ausnahmsweise zur endlichen Ähnlichkeit.

Während die Geographie im allgemeinen die Abbildung der ganzen Oberfläche des Erdkörpers zum Gegenstand nimmt, wird in der Geodäsie (Landesvermessung) die Darstellung fast immer auf verhältnismäßig kleine Teile der Erdoberfläche beschränkt sein. Die augenscheinliche, den beiden genannten Gebieten zwar gemeinsame, in ihren Endzwecken jedoch grundverschiedene Auswertung von Messungen am Erdkörper — die Herstellung einer Karte — ist indessen nicht allein Zweck der Abbildung; eine wesentliche Aufgabe stellt in der Geodäsie die Überführung der schwierigen sphäroidischen in die leichter ausführbaren sphärischen und ebenen Rechnungen.

Die in den Landesvermessungen gebräuchlichsten Abbildungen von Teilen der Oberfläche des Erdsphäroids sind die Abbildungen auf einer Kugelfläche, einer Ebenen- oder einer Kegelfläche unter der Bedingung, daß in einer Bildlinie (Mittelmeridian oder Mittelparallel) das Vergrößerungsverhältnis = 1 sein soll. In diesem Bereiche, dessen praktische Ausdehnung von der jeweiligen Genauigkeit abhängt, findet also Kongruenz (in der Maßstabsreduktion Ähnlichkeit) statt.

Für die Berechnung einer Landesvermessung, die strenggenommen auf Grund der wahren Erdgestalt zu erfolgen hätte, wählt man bekanntlich ein aus Gradmessungen errechnetes Rotationsellipsoid. Die Mehrzahl der deutschen Staaten hat dabei ihren Vermessungen das von Bessel bestimmte mit den Konstanten:

a = Halbe große Achse (Radius des Äquators), log = 6,804 6434 637,

b = Halbe kleine Achse (Umdrehungsachse), log = 6,803 1892 839,

e^2 = Quadrat der Exzentrizität

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \log = 7{,}824\ 4104\ 2365 - 10,$$

$$N = \text{Querkrümmungsradius} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$M = \text{Meridiankrümmungsradius} = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}},$$

$$R = \text{mittlerer Krümmungsradius} = \sqrt{MN}$$

für die geographische Breite φ zur Grundlage gegeben [1]).

Zur Projektion der Oberfläche umgibt man den mathematischen Erdkörper mit Linien, die das Netz für die kartographische Darstellung und für die Punktbestimmung ergeben. Die der Geographie geläufigen Linien sind: Meridian und Parallelkreis, zur Punktbestimmung dienen Länge und Breite.

---

[1]) Obgleich der heutigen Wissenschaft Bessels Werte für die wahrscheinlichste mathematische Erdgestalt nicht mehr genügen, so sollen sie doch weiterhin nach dem Beschluß des Beirats für Vermessungswesen maßgebend bleiben. Einige ältere, noch gültige Vermessungen, so z. B. auch die um 1832 begonnene Oldenburgische Landesvermessung, gründen sich noch auf Wahlbecks Dimensionen.

Wenn auch die Geodäsie eine solche Punktbestimmung[2]), besonders zur einheitlichen Zusammenfassung größerer Gebiete und zur systematischen, allen Anforderungen genügenden Veröffentlichung der Ergebnisse, ungern entbehren wird, so ist doch die Verwendung und völlige, schon durch ihre hohen Kosten gebotene Nutzbarmachung einer Landesvermessung für alle Bedürfnisse von Wirtschaft, Technik und Verwaltung an rechtwinklige Koordinaten gebunden. Dieser reelle Sinn jeder Vermessung fordert daneben im Gegensatz zu den sphäroidischen und sphärischen Rechnungen der höheren Geodäsie weitmöglichst die ebene Rechnung.

> „Die Darstellung der Messungsergebnisse (d. i. die Abbildung des durch das Vermessungsgebiet gebildeten Teiles der Erdoberfläche) durch ebene rechtwinklige Koordinaten bildet somit eine wesentliche Aufgabe jeder Landesvermessung."

Die zeitigen deutschen Vermessungen haben ihre Lösung unter Bevorzugung nachstehender Abbildungsarten erstrebt:

1. einer transversal-zylinderischen[3]) Abbildungsart für Vermessungsgebiete, deren Haupterstreckung in der N—S-Richtung liegt, und
2. einer konischen für Gebiete mit der Hauptausdehnung in der W—O-Richtung.

Für die erste Art kann als Hilfskörper ein Zylinder mit dem Mittelmeridian des auf die Kugel projizierten Vermessungsgebietes als Grundkreis angenommen werden, die zweite führt dazu einen das Vermessungsgebiet im Mittelparallelkreis berührenden Kegel ein. Die ebene Abbildung wird in beiden Fällen

---

[2]) Die geodätische Punktbestimmung nach Länge und Breite ist indessen nicht identisch mit der gleichen (astronomisch bestimmten) geographischen. Sie stellt hier lediglich ein umfassenderes einheitliches Koordinatensystem dar.

[3]) Transversal im Hinblick auf Mercators konforme Projektion, die eine Zylinderprojektion mit dem Äquator als Grundkreis darstellt.

durch einfache Abwicklung der Mantelfläche des benutzten Hilfskörpers erhalten.

Die im Vergleich zur ganzen Erdoberfläche geringe Ausdehnung des Vermessungsgebietes gestattete meistens in einer für die praktischen Belange hinreichenden Genauigkeit an Stelle der sphäroidischen Erdgestalt die unmittelbare Annahme einer Kugel, deren Radius der mittleren Krümmung für die Mitte des Vermessungsgebietes entsprach, als Messungs- und Ausgangsfläche.

Bei der konischen Abbildung gehen die Meridiane in Kegelmantellinien über, erscheinen mithin in der Ebene als nach einem weit außerhalb des Vermessungsgebietes liegenden Punkte hin konvergierende Geraden. Die Parallelkreise werden als konzentrische Kreise um diesen Punkt abgebildet; dabei können die Meridianabschnitte entweder in ihrer wahren Größe vom Mittelparallelkreis aus übertragen oder aber bis zur Winkeltreue der ganzen Abbildung vergrößert werden. Eine solche konische Abbildung hat von den deutschen Staaten nur Mecklenburg, wo sie durch Paschen, einem Schüler von Gauß, als winkeltreue (konforme) Kegelprojektion mit einem querachsigen Koordinatensystem ($+x$-Achse in N—S, $+y$-Achse in O—W-Richtung) eingeführt wurde.

Ein Mittelmeridian als Abszissenachse und dazu senkrechte Großkreise als Ordinatenträger bilden das sphärische Netz der „Soldnerschen Kugel-Koordinaten“.

Die transversal-zylinderische Abbildung, die diesen Mittelmeridian zum Grundkreis hat, gibt in der Ebene die Abszissenwerte in wahrer Größe wieder, die zur Abszisse senkrechten Kugelgroßkreise werden auf der Hilfsfläche Mantellinien, erscheinen in der ebenen Abbildung mithin als zur Abszissenachse senkrechte Geraden.

Für die Übertragung der Ordinaten bestehen ähnlich wie bei den Meridianabschnittsbildern der konischen Abbildung wieder zwei Möglichkeiten: Die Ordinaten werden entweder auf ihren Bildlinien, wie es den meisten zeitigen Vermessungen eigentümlich ist, unverändert übertragen, oder sie werden bis zur Winkel-

treue der ganzen Abbildung vergrößert und geben damit die rechtwinkligen konformen Koordinaten, deren zeitige Verwendung auf wenige Spezialmessungen im rheinischen Industriegebiet beschränkt ist.

Eine besondere, einheitliche Projektion eines größeren Gebietes hat noch die Preußische Landesaufnahme (jetzt Reichsamt für Landesaufnahme) in ihrer konformen Doppelprojektion [4]). Diese ist indessen lediglich den Zwecken einer umfassenden Ausgleichsrechnung für das ganze Staatsgebiet angepaßt und für die Verwendung in einer Landesvermessung ungeeignet.

Bei der Übertragung eines von geodätischen (oder sphärischen) Linien gebildeten Dreiecksnetzes auf die Ebene werden die Bilder der Dreiecksseiten Kurven, die für den Zweck der einfachen Rechnung durch ihre Sehnen, also Geraden, ersetzt werden müssen.

Die Verwendung einer Projektion wird geodätisch bedingt durch die den Übergang vom sphäroidischen (oder sphärischen) Kurvenbild zu seinem Rechnungsbild vermittelnden

Seiten- und Azimutverbesserung.

Für die zeitig häufigste, durch unmittelbare, ebene Benutzung von Soldnerschen Kugel-Koordinaten erhaltene Abbildung mögen die Bestimmungselemente durch nachstehende (näherungsweisen) Entwicklungen charakterisiert sein.

1. Seitenverbesserung:

Aus den bekannten Rechnungsformeln für rechtwinklig-sphärische Koordinaten [5])

$$y_2 - y_1 = S \sin T - \frac{(x_2 - x_1)^2}{6 r^2} \left(3 y_1 + (y_2 - y_1)\right)$$

$$x_2 - x_1 = S \cos T + \frac{(x_2 - x_1)}{6 r^2} \left(3 y^2{}_2 - (y_2 - y_1)^2\right)$$

---

[4]) Vgl. Teil 3 Abschnitt c.

[5]) Für die Theorie rechtwinkliger sphärischer Koordinaten vgl. z. B. Jordan, Handbuch für Vermessungswesen Bd. III oder Lit.-Verz. Nr. 10.

ergibt sich durch Addition der Quadratsummen bei Vernachlässigung der Glieder vierter und höherer Ordnung:

$$(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2=\mathfrak{S}^2=S^2-2S\sin T\frac{(x_2-x_1)^2}{6r^2}\{3y_1+(y_2-y_1)\}$$
$$+2S\cos T\frac{x_2-x_1}{6r^2}\{3{y_2}^2-(y_2-y_1)^2\}.$$

Mit $S\cdot\sin T=(y_2-y_1)$ und $(x_2-x_1)=S\cdot\cos T$ wird nach leichter Umformung

$$m^2=\frac{\mathfrak{S}^2}{S^2}=1+\frac{\cos^2 T}{3r^2}({y_2}^2+y_1y_2+{y_1}^2).$$

Mit einem mittleren Ordinatenwert

$$y_m=\frac{y_1+y_2}{2}\quad\text{wird zunächst}\quad y_2=y_m+\frac{y_2-y_1}{2}$$
$$y_1=y_m-\frac{y_2-y_1}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$m^2=1+\frac{{y_m}^2}{r^2}\cos^2 T+\frac{(y_2-y_1)^2}{12r^2}\cos^2 T$$

oder

$$\log m=\log\mathfrak{S}-\log S=\frac{M\cdot{y_m}^2}{2r^2}\cos^2 T+\frac{M(y_2-y_1)^2}{24r^2}\cos^2 T \quad (1)$$

und

$$m=\frac{\mathfrak{S}}{S}=1+\frac{{y_m}^2}{2r^2}\cos^2 T+\frac{(y_2-y_1)^2}{24r^2}\cos^2 T. \quad (2)$$

2. Richtungsverbesserung:

Aus $\frac{d\,\mathrm{tg}\,T}{dT}=\frac{1}{\cos^2 T}$ folgt $d\,\mathrm{tg}\,T=\frac{1}{\cos^2 T}\cdot dT$.

Aus $\mathrm{tg}\,T=\frac{\sin T}{\cos T}$ folgt $d\,\mathrm{tg}\,T=\frac{\cos T\cdot d\sin T-\sin T\cdot d\cos T}{\cos^2 T}$,

mithin $dT=\cos T\cdot d\sin T-\sin T\cdot d\cos T$.

Die Übertragungsformeln geben

$$\sin T=\frac{y_2-y_1}{S}+\frac{(x_2-x_1)^2}{6r^2S}\{3y_1+(y_2-y_1)\}=\frac{y_2-y_1}{S}+d\sin T$$

und

$$\cos T = \frac{x_2 - x_1}{S} - \frac{x_2 - x_1}{6 r^2 S}\left\{3 {y_2}^2 - (y_2 - y_1)^2\right\} = \frac{x_2 - x_1}{S} + d\cos T.$$

Mit $S = \frac{x_2 - x_1}{\cos T}$ wird $d \sin T = \frac{x_2 - x_1}{6 r^2} \cos T \left\{3 y_1 + (y_2 - y_1)\right\}$

und $d \cos T = -\frac{\cos T}{6 r^2}\left\{3 {y_2}^2 - (y_2 - y_1)^2\right\}$.

Wird weiterhin $(y_2 - y_1) \cdot \cos T = (x_2 - x_1) \sin T$ gesetzt, so wird

$$d T = (T - t)'' = \frac{(x_2 - x_1) y_1}{2 r^2} \varrho'' \cos^2 T + \frac{{y_2}^2}{4 r^2} \sin 2 T \cdot \varrho''$$
$$+ \frac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}{6 r^2} \cos 2 T \cdot \varrho''.$$

Mit $y_m = \frac{y_2 + y_1}{2}$; $\cos^2 T = 1 - \sin^2 T$; $\cos 2 T = 2 \cos^2 T - 1$

wird hieraus zunächst

$$d T = \varrho''\left\{\frac{x_2 - x_1}{2 r^2} y_m - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 + y_1)}{4 r^2} \sin^2 T\right.$$
$$+ \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{12 r^2} \cos^2 T + \frac{{y_m}^2}{4 r^2} \sin 2 T + \frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{8 r^2} \sin 2 T$$
$$\left. + \frac{(y_2 - y_1)^2}{16 r^2} \sin 2T - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{6 r^2}\right\}.$$

Setzt man weiter $(y_2 - y_1) \cos T = (x_2 - x_1) \sin T$, so ergibt sich

$$d T = \varrho''\left\{\frac{x_2 - x_1}{2 r^2} y_m + \frac{(x_2 - x_1)^2 \sin T \cos T}{12 r^2} + \frac{{y_m}^2}{4 r^2} \sin 2 T\right.$$
$$\left. + \frac{(y_2 - y_1)^2 \sin T \cos T}{8 r^2} - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{6 r^2}\right\}$$

und schließlich

$$d T = \varrho'' \frac{x_2 - x_1}{2 r^2} y_m + \varrho'' \frac{{y_m}^2}{4 r^2} \sin 2 T - \varrho'' \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{6 r^2}$$
$$+ \varrho'' \frac{2 (x_2 - x_1) + 3 (y_2 - y_1)^2}{48 r^2} \sin 2 T. \qquad (3)$$

Die Beziehungen zwischen rechtwinklig-sphärischen Koordinaten (x, y) und ebenen konformen Koordinaten ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$) und damit zugleich eine Abbildungsgleichung konformer Kugelabbildung geben folgende Entwicklungen:

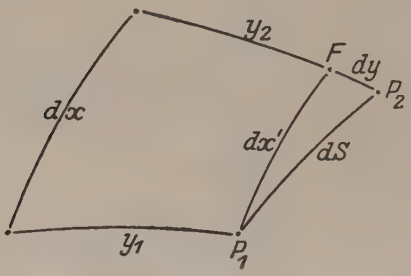


Fig. 1.

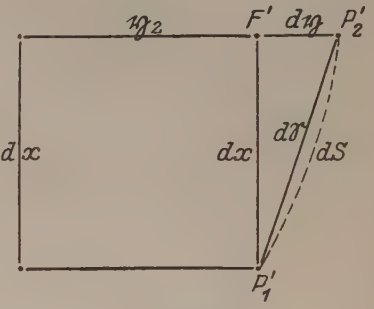


Fig. 2.

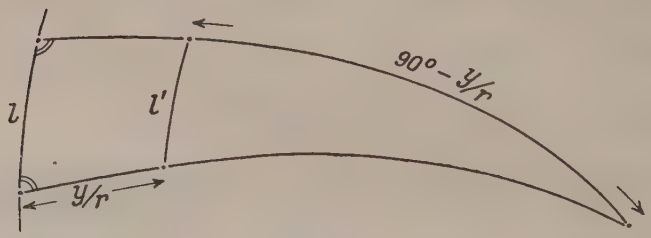


Fig. 3.

Es ist zunächst unmittelbar, da der Anfangsmeridian in wahrer Länge abgebildet wird,

$$x = \mathfrak{x}. \tag{4}$$

Das charakteristische Merkmal konformer Abbildung — die Ähnlichkeit der Differenzialgebilde — gibt mit Bezug auf die Figuren 1 und 2

$$\frac{P_1'F'}{P_1F} = \frac{F'P_2'}{FP_2}.$$

Aus der Theorie der rechtwinklig-sphärischen Koordinaten[6]) ist bekannt mit Bezug auf Figur 3

$$l' = l \cos \frac{y}{r}$$

[6]) Vgl. Anm. 5.

oder

$$dl' = dl \cos \frac{y}{r}.$$

Damit ist

$$\frac{d\mathfrak{x}}{dx \cdot \cos \frac{y}{r}} = \frac{d\mathfrak{y}}{dy}.$$

Mit $d\mathfrak{x} = dx$ und Einführung der Reihe für $\cos \frac{y}{r}$ wird mit Vernachlässigung der Glieder ab 4. Ordnung

$$d\mathfrak{y} = dy \left(1 + \frac{y^2}{2r^2}\right),$$

woraus durch Integration

$$\mathfrak{y} = y + \frac{y^3}{6r^2} \tag{5}$$

oder

$$\log \mathfrak{y} = \log y + \frac{M}{6} \cdot \left(\frac{y}{r}\right)^2 \tag{6}$$

folgt. Die Bestimmungselemente der durch rechtwinklig ebene konforme Koordinaten erhaltenen Abbildung von Teilen einer Kugelfläche seien durch folgende Untersuchungen vermittelt.

Für das in allen Richtungen gleiche Vergrößerungsverhältnis [7]) ergibt sich

$$m = \frac{\mathfrak{y}_2 - \mathfrak{y}_1}{y_2 - y_1} = 1 + \frac{y_2^3 - y_1^3}{6r^2 (y_2 - y_1)}.$$

Mit Einführung einer mittleren Ordinate

$$y_m = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

wird

$$m = \frac{\mathfrak{S}}{S} = 1 + \frac{y_m^2}{2r^2} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{24r^2} \tag{7}$$

oder

$$\log m = \log \mathfrak{S} - \log S = \frac{M \cdot y_m^2}{2r^2} + \frac{M (y_2 - y_1)^2}{24r^2}. \tag{8}$$

[7]) Die Unabhängigkeit des Vergrößerungsverhältnisses von der Richtung ist eine unmittelbare Folge der Winkeltreue. Vgl. auch Teil 2.

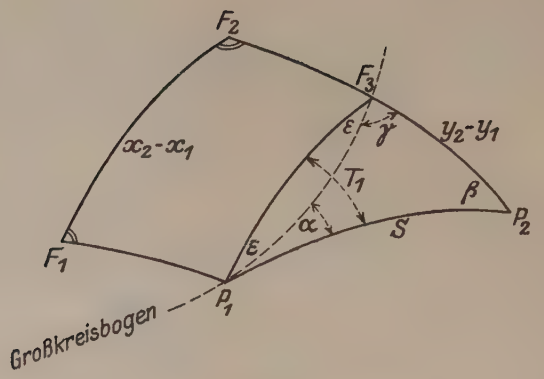


Fig. 4.

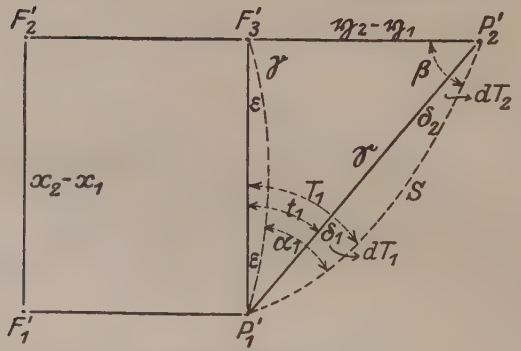


Fig. 5.

Setzt man

$[\psi]$ = Exzeß des sphärischen Dreiecks $P_1F_3P_2 = \dfrac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}{2r^2}\varrho''$,

$[\varepsilon]$ = Exzeß des sphärischen Vierecks $F_1P_1F_3F_2 = \dfrac{y_1(x_2 - x_1)}{r^2}\varrho''$,

$[\delta]$ = Exzeß des sphärischen Vierecks $F_1F_2P_2P_1$

$$= \frac{(y_2 + y_1)(x_2 - x_1)}{2r^2}\varrho'',$$

so ist zunächst mit den Bedeutungen der Figuren 4 und 5

$$\alpha - \frac{[\psi]}{3} + (\beta + \gamma) - \frac{2[\psi]}{3} = 180^0$$

und

$$\alpha - (\delta_1 - \varepsilon) + (\beta + \gamma) - (\delta_2 - \varepsilon) = 180^0,$$

mithin $[\delta] = [\psi] - [\varepsilon]$.

Aus $\frac{[\psi]}{3} = \delta_1 - \varepsilon$ folgt $\delta_1 = \frac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_1)}{6r^2}\varrho'' + \frac{y_1(x_2 - x_1)}{2r^2}\varrho''$

$$= \varrho'' \frac{x_2 - x_1}{6r^2}(2y_1 + y_2)$$

aus $\frac{2[\psi]}{3} = \delta_2 - \varepsilon$ folgt $\delta_2 = \frac{x_2 - x_1}{6r^2}\varrho''(2y_2 + y_1)$.

Mit einem mittleren Ordinatenwert y_m wird

$$dT_1 = \frac{x_2 - x_1}{2r^2}\varrho'' y_m - \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{12r^2}\varrho'' \qquad (9)$$

$$\text{und } dT_2 = y_m \frac{x_2 - x_1}{2r^2}\varrho'' + \frac{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)}{12r^2}\varrho''.$$

Die vorstehenden Gleichungen 1 bis 9 lassen den Zusammenhang der beiden geodätisch wichtigsten Abbildungskoordinaten und ihre Wirkungsart erkennen. Sie werden weiterhin die Grundlage für die Untersuchung über ihre Verwendung in der Landesvermessung bilden.

Soldner hat die nach ihm benannten Koordinaten nicht völlig selbst geschaffen; deren Ursprung liegt vielmehr in Frankreich, wo sie etwa 1734 zuerst durch Cassini und später Clairaut entwickelt und angewandt wurden[8]). Aber es ist Soldners und auch Bohnenbergers Verdienst, die grundlegende Bedeutung solcher Koordinatensysteme, die die Krümmung der Erdoberfläche berücksichtigen und den Übergang sowohl zur ebenen Rechnung als auch zu den geographischen Bestimmungselementen vermitteln, erkannt, durch Aufstellen der Rechenformeln für alle praktischen Fälle ihre Verwendung ermöglicht und damit ihren

[8]) Vgl. Jordan, Die deutschen Koordinatensysteme, Z. f. V. 1895 S. 337, und Lit.-Verz. Nr. 3. Man spricht auch wohl von einer Cassini-Soldnerschen oder kongruenten Projektion.

Ländern (Bayern bezw. Württemberg) die Führung innerhalb des deutschen Vermessungswesens zu Beginn des vorigen Jahrhunderts gesichert zu haben. Die zunächst nur sphärisch entwickelten Formeln sind dann von Gauß 1828 in seiner klassischen Schrift: „Disquisitiones generales circa superficies curvas" zu sphäroidischen weiterentwickelt worden[9]).

Die vorherrschende Anwendung Soldnerscher Koordinaten in den zeitigen Vermessungswerken darf indessen nicht zur Folgerung ihrer unumstrittenen Überlegenheit führen. Daß ihnen eine Bevorzugung gegeben wurde und sie in einer wohl 100jährigen, mit stetig steigenden Anforderungen verbundenen Entwicklung ihren Platz wahrten, mag z. T. in der anfänglichen, sich auf diesen Elementen stützenden Führung der süddeutschen Vermessungen, zum anderen in der weitgehenden Umgestaltung, die die Änderung eines gewählten Koordinatensystems bedingt, begründet sein.

Indessen ist schon des öfteren die Forderung konformer Koordinaten laut geworden, insbesondere hat 1896 Prof. Jordan, damals an der Technischen Hochschule Hannover, auf die Bedeutung konformer Koordinaten hingewiesen und für deren allgemeine Einführung an Stelle der Soldnerschen Koordinaten geworben[10]). Die stetig wachsende Bedeutung neuzeitlicher Vermessungen für alle Zweige von Wirtschaft und Technik und die Bestrebungen zur Vereinheitlichung der deutschen Vermessungswerke haben zu Beratungen maßgebender Stellen geführt[11]), die in jüngster Zeit mit den Beschlüssen des Beirats für Vermessungswesen:

---

[9]) Vgl. Ostwalds Klassiker Nr. 5.

[10]) Vgl. Zeitschrift für Vermessungswesen 1896. Die Forderung konformer Koordinaten eröffnete einen fast den ganzen Jahrgang füllenden Kampf zwischen den Vertretern konformer Koordinaten (Prof. Jordan) und den Anhängern der Soldnerschen Koordinaten (Prof. Koll, Bonn), ohne allerdings seinerzeit eine Änderung der Verhältnisse zu bewirken.

[11]) Schon am 31. Oktober 1917 fand in Berlin eine Tagung der wissenschaftlichen Kommission der Preußischen Landesaufnahme statt, in der über die Vereinheitlichung des Vermessungswesens in Deutschland und Österreich beraten wurde, mit dem Ergebnis u. a., an Stelle der konformen Doppelprojektion ebene konforme Koordinaten einzuführen.

Die Ergebnisse des Reichsamts für Landesaufnahme durch rechtwinklige konforme Koordinaten, wie sie die direkte Gauß-Krügersche Übertragung von 3° breiten Meridionalstreifen des Sphäroids in die Ebene gibt, darzustellen und ein Gleiches weitmöglichst für die Länder anzustreben,

ihren für eine einheitliche Weiterentwickelung des deutschen Vermessungswesens richtungsgebenden Abschluß gefunden haben[12]).

Der erste auf der 1. Tagung des genannten Beirats in Berlin 1921 gefaßte Beschluß lautete:

„Die Messungen des Reichsamts für Landesaufnahme werden in ebenen rechtwinkligen Koordinaten, bezogen auf 3° breite Meridionalstreifen nach Gauß-Krüger, dargestellt. Die beteiligten Landesregierungen und die Behörden und Selbstverwaltungen stimmen grundsätzlich zu und behalten sich den Zeitpunkt der praktischen Anwendung vor."

Man hat sich dann aber wohl überzeugen müssen, daß eine obligatorische Einführung für alle Spezialvermessungen in dieser Form nicht angängig ist, und so wurde auf der Tagung 1923 in Cassel ein weiterer Beschluß gefaßt, der das von der Preußischen Landesaufnahme begründete System geographischer Koordinaten als deutsches Einheitssystem erklärt und den Ländern mit eigener Triangulation empfiehlt, ihre Hauptpunkte — soweit es noch nicht geschehen[13]) — alsbald in dieses System einzuordnen.

---

[12]) Vgl. Sitzungsbericht der 1. Tagung Berlin 1921 und 2. Tagung Cassel 1923.

[13]) Für die meisten Staaten ist dieser Beschluß bereits durchgeführt. Vgl. Thilo, Koordinaten der sächsischen Hauptdreieckspunkte im deutschen Einheitssystem (Jahresbericht des Reichsamts für Landesaufnahme 1922/24), und Clauß, Der Zusammenschluß süddeutscher Dreiecksnetze mit den Dreiecksketten der Preußischen Landesaufnahme zur Gewinnung einheitlicher geographischer Koordinaten (Z. f. V. 1926 S. 97—107), und Thilo, Anschluß der Mecklenburgischen Landesvermessung an das deutsche Einheitssystem (Sonderheft 3 zu den Mitteilungen des Reichsamts für Landesaufnahme 1926).

Von diesen geographischen Einheitskoordinaten ist im Bedarfsfalle der Übergang sowohl zu den ebenen konformen Koordinaten der Meridionalstreifen als auch zu jedem beliebigen Spezialsystem leicht zu vollziehen.

2.

Die Abbildungsgleichungen der Gaußschen konformen Projektion.

Die Urschrift der Theorie dieser zur Grundlage einer einheitlichen Zusammenfassung deutscher Vermessungswerke gewählten Projektion ist die von Carl Friedrich Gauß gegebene Beantwortung der 1822 seitens der Königlichen Sozietät der Wissenschaften in Kopenhagen gestellten Preisfrage:

> „Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird."

Eine für die praktischen Belange der Geodäsie vorzügliche Ausgestaltung dieser Theorien ließ Gauß 1843 unter dem Titel: „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" folgen. In dieser Schrift wird der Projektion die Bezeichnung „konform" beigelegt.

Das charakteristische Merkmal liegt in der geforderten Ähnlichkeit der Differenzialgebilde, einer geometrischen Eigenschaft wie sie in der Ebene durch eindeutige komplexe Funktionen $w = f(z)$ vermittelt wird.

Das Kriterium eindeutiger komplexer Funktionen ist die Unabhängigkeit des Differentialquotienten $\frac{dw}{dz_0}$ in z_0 von $\frac{dy}{dx}$, d. h. die Unabhängigkeit von der Richtung, in welcher die Annäherung an z_0 erfolgt.

Es wird ausgedrückt durch die Differenzialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{10}$$

Es ist dann $\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i\,\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{i\,\partial u}{\partial y}$.

Die geometrische Deutung dieser Bedingungen gibt die konforme Übertragung von beliebigen Figuren, der x, y-Ebene in die u, v-Ebene.

Werden den unendlich nahe beieinanderliegenden Punkten P_0, P_1, P_2, der x, y-Ebene, ihre Bildpunkte in der u, v-Ebene: P_0', P_1', P_2' zugeordnet nach der eindeutigen komplexen Funktion $P_n = f(P_n')$, dann ergibt sich in der u, v-Ebene das Differenzialdreieck $P_0'\,P_1'\,P_2'$. Die von P_0 ausgehenden Strahlen mögen sein $\overline{P_0P_1} = ds_1$ und $\overline{P_0P_2} = ds_2$, ihre Bilder ds_1' und ds_2'. Dann ist im Punkte P_0

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| = |f'(P_0)| = \frac{ds_1}{ds_1'} = \frac{ds_2}{ds_2'}, \tag{11}$$

in anderer Schreibart

$$\frac{ds_1}{ds_1'}\left\{\cos(\varphi_{s_1} - \varphi_{s_1}') + i\sin(\varphi_{s_1} - \varphi_{s_1}')\right\}$$

$$= \frac{ds_2}{ds_2'}\left\{\cos(\varphi_{s_2} - \varphi_{s_2}') + i\sin(\varphi_{s_2} - \varphi_{s_2}')\right\}.$$

Daraus folgt $\frac{ds_1}{ds_1'} = \frac{ds_2}{ds_2'}$ oder $P_0P_1 : P_0P_2 = P_0'P_1' : P_0'P_2'$ und $(\varphi_{s_1} - \varphi_{s_1}') = (\varphi_{s_2} - \varphi_{s_2}') = \varphi_{s_1} - \varphi_{s_2} = \varphi_{s_1}' - \varphi_{s_2}'$, d. h. die Differentialdreiecke auf Urbild und Abbild sind einander ähnlich.

Aus Gl. 11 folgt ferner für die Differenzialstrecke s

$$s = s'\,|f'(P_0)|,$$

d. h. $f'(P_0) = m =$ Vergrößerungsverhältnis im Punkte P_0.

Als Beispiel sei gewählt die Funktion $w = \varrho \cdot e^{i\varphi_k} \cdot z$.

Dann ist mit

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(u + iv) = (a + bi) \times (x + iy) = (ax - by) + (ay + bx)\cdot i$$

und $u = (ax - by)$ und $v = (ay + bx)$. (12)

Es ist durch

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \text{ und } \frac{\partial v}{\partial y} = a,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = +b \text{ und } \frac{\partial u}{\partial y} = -b$$

den Bedingungen in Gl. 10 genügt.

Wählt man in der x, y-Ebene eine beliebige Kurve, z. B. den Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, dann ist

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Diesen Wert für y in Gl. 12 eingesetzt, ergibt

$$u = ax \mp b\sqrt{r^2 - x^2};\; v = \pm a\sqrt{r^2 - x^2} + bx$$

und

$$u^2 = a^2x^2 \mp 2abx\sqrt{r^2 - x^2} + b^2r^2 - b^2x^2;$$

$$v^2 = b^2x^2 \pm 2abx\sqrt{r^2 - x^2} + a^2r^2 - a^2x^2$$

und damit $u^2 + v^2 = r^2(a^2 + b^2)$, also das Abbild ist wiederum ein Kreis mit dem Radius $R = r \cdot \varrho$; die Funktion stellt damit eine Ähnlichkeitstransformation im Verhältnis ϱ dar.

Wählt man in der x, y-Ebene die Gerade $y = \operatorname{tg}\varphi_z \cdot x$, so ergibt sich

$$u = ax - bx\operatorname{tg}\varphi_z$$

$$v = ax\operatorname{tg}\varphi_z + bx$$

$$v = \frac{a\operatorname{tg}\varphi_z + b}{a - b\operatorname{tg}\varphi_z} \cdot u\,.$$

Das Bild ist also wiederum eine Gerade durch den Ursprung, deren Richtungskoeffizient sich aus folgendem ergibt:

Es ist $b = a\operatorname{tg}\varphi_k$, damit wird

$$\frac{a\operatorname{tg}\varphi_z + b}{a - b\operatorname{tg}\varphi_z} = \frac{a\operatorname{tg}\varphi_k + a\operatorname{tg}\varphi_z}{-a\operatorname{tg}\varphi_k \times \operatorname{tg}\varphi_z + a} = \operatorname{tg}(\varphi_k + \varphi_z)\,.$$

Die Bildgerade ist also um den Winkel φ_k gegen ihr Urbild verschwenkt. Das Vergrößerungsverhältnis ist

$$m = \sqrt{a^2 + b^2} = \varrho = \text{const},$$

d. h. die Abbildung ist auch im Endlichen ähnlich.

Die Funktion $w = \varrho \cdot e^{i\varphi_k} \cdot z$ stellt sich damit geometrisch als Drehung und Streckung einer komplexen Ebene dar und gibt

für die besonders der Landmessung geläufige Aufgabe der Koordinatenumformung eine brauchbare Lösung.

Es möge sich hierbei um die Übertragung von Koordinaten eines Systems in ein anderes mit gleichem Anfangspunkt handeln, dessen Lage gegen das erstere durch die beiderseitigen Koordinaten eines identischen Punktes festgelegt ist.

Setzt man

$$w - z = \delta \text{ und } \varrho \cdot e^{i\varphi} - 1 = k,$$

so folgt die Umformung dem Gesetz

$$\delta_n = k \cdot z_n. \tag{13}$$

Aus den Werten des gegebenen identischen Punktes (w', z') ergibt sich

$$k = \frac{\delta'}{z'}\ ^{14}). \tag{14}$$

Vermittels einer solchen Übertragung kann auch der Übergang (die Einordnung) einzelner Landesvermessungen in die ebenen Koordinaten der Meridionalstreifen vollzogen werden.

Die Punkte höherer Ordnung (I. und II.) einer Landesvermessung werden üblicherweise in geographischen und rechtwinkligen (meist Soldnerschen) Koordinaten bestimmt sein, für die niederen Ordnungen sind gewöhnlich nur die letzteren bekannt.

Die Einordnung einer an die Punkte der Landesaufnahme angeschlossenen Landesvermessung in die Meridionalstreifen kann erfolgen einmal mittels der geographischen Werte oder durch die direkte Transformation nach den von Krüger gegebenen Rechenformeln (Literaturverzeichnis Nr. 5). Wesentlich anders aber liegen die Verhältnisse, wenn in beiden Vermessungen eine Reihe identischer Punkte vorliegen, die infolge ihrer verschiedenen Herleitung nicht genau übereinstimmen werden.

Die Funktion $w = f(z)$ gibt für diese Aufgabe zwei Lösungsmöglichkeiten. Wenn nur wenig identische Punkte (w', w'', w'''

---

[14]) Ein Beispiel solcher Koordinatenumformung mit einer Erweiterung zur nomographischen Lösung ist im 6. Teil (Anhang) gegeben.

. . . z', z'', z''' . . .) vorhanden sind, liegt es nahe, $f(z)$ nach allgemeinen Interpolationsregeln zu bestimmen.

Nach Newtonscher Interpolation ist mithin zu setzen

$$w_n = f(z_n) = w' + A_1(z_n - z') + A_2(z_n - z')(z_n - z'') + A_3(z_n - z')(z_n - z'')(z_n - z''') + ,$$

worin

$$A_1 = \frac{w'' - w'}{z'' - z'} \qquad B_1 = \frac{w''' - w''}{z''' - z''}$$

$$A_2 = \frac{B_1 - A_1}{z''' - z'} \text{ usw.}$$

Setzt man noch

$$(w_n - z_n) = \delta_n$$

und nimmt für w' und z' den Ursprung ($w' = z' = 0$), dann ist

$$\delta_n = a_1(z_n) + A_2(z_n)(z_n - z'') + \text{ usw.}$$

mit

$$a_1 = \frac{w''}{z''} - 1 \text{ usw.}$$

Die numerische Durchführung einer solchen Lösung wird aber, besonders bei mehreren identischen Punkten, umständlich werden. Deshalb empfiehlt sich die folgende Art.

Es handelt sich bei der Lösung offenbar um eine Drehung und Streckung, beide Elemente werden in Gl. 13 durch den Faktor k gegeben. Stellt man die Bedingung, daß bei Drehung und Streckung des Systems einer Landesvermessung die Quadratsumme der Verbesserung an gemeinsamen Punkten zum Minimum werden soll, so bestimmt sich k aus

$$k = k' + f' \text{ mit } k' = \frac{\delta'}{z'}$$

$$k = k'' + f'' \text{ mit } k'' = \frac{\delta''}{z''} \text{ usw.,}$$

hieraus folgt

$$[ff] = n \cdot k^2 - 2k[k'] + [k'k'].$$

Das Minimum der Quadratsumme der Verbesserungen ergibt sich aus

$$\frac{d[ff]}{dk} = 2nk - 2[k'] = 0, \text{ für } k = \frac{[k']}{n}^{15}. \qquad (15)$$

Die numerische Lösung dieser Formel ist unschwer durchzuführen und gibt in ihrer Erweiterung zur nomographischen Lösung, wie sie im Anhang für das Beispiel einer gewöhnlichen Koordinatenumformung gegeben ist, eine vorteilhafte Rechnung für Punkte aller Ordnungen.

Da die Verbesserungen gewöhnlich sehr geringfügig sein werden, wird die Genauigkeit eines Nomogramms meist hinreichend sein, für kartographische Zwecke (Einrechnung von Eckpunkten in die Reichswirtschaftskarte!) wird sie stets in genügender Schärfe die Werte ergeben.

Den Gang einer solchen Einordnung möge folgendes Schema klarstellen.

Es ist gegeben:

Im Meridionalstreifensystem		Im System der Landesvermessung	
I. und II. Ordnung		I. und II. Ordnung	
P_1	in geographischen Koordinaten des Einheitssystems und in ebenen rechtwinkligen Koordinaten des Meridionalstreifens	P_1	in geographischen und rechtwinklig-Soldnerschen Koordinaten
P_2		P_2	
P_n		P_n	
Es ist gesucht		**Weiterhin gegeben**	
p_1	in ebenen rechtwinkligen Koordinaten	p_1	in rechtwinkligen Soldnerschen Koordinaten
p_2		p_2	
p_n		p_n	

Voraussetzung ist, daß beiden Vermessungen die gleiche Bezugsfläche zugrunde liegt und die Landesvermessung auf den Anfangsmeridian der Landesaufnahme reduziert ist. Man berechnet zunächst nach den von Krüger gegebenen Formeln für $P_1 P_2 \ldots P_n$ die ebenen rechtwinkligen Koordinaten aus den

---

[15]) Dieses Ergebnis war nach Regeln der Ausgleichsrechnung zu erwarten.

Werten der Landesvermessung im Meridionalstreifen (vorläufig) und bestimmt darauf k nach Gl. 15.

Nach den gleichen Formeln werden $p_1 \ldots p_n$ der Landesvermessung in das Meridionalstreifensystem eingerechnet und ihre Verbesserung berechnet nach der im Anhang für die gewöhnliche Koordinatenumformung gegebenen Art, oder sie werden einem auf Grund der dort gegebenen Entwicklungen entworfenen Nomogramm entnommen.

Nimmt man an Stelle w deren konjugiert komplexe Zahl $(\overline{w})$, so liefert $\overline{w} = f(z)$ ebenfalls eine konforme Abbildung, konform aber nur in dem Sinne, daß die Winkel in Urbild und Abbild wohl der Größe, nicht aber dem Drehsinn nach übereinstimmen. Es ergibt sich das Bild der Spiegelung an der reellen Achse, $w = f(\overline{z})$ gibt eine Spiegelung an der imaginären Achse.

Für die geodätischen Belange interessiert indessen nur die erstere Art: die strenge Winkeltreue.

Das Rotationsellipsoid wird erhalten durch Umdrehung einer Ellipse um den kleinen Durchmesser als Achse. Ein Punkt der rotierenden Ellipse ist bestimmt durch den Winkel γ seiner Normalen mit dieser Achse. Bezeichnet M die Länge dieser Normalen, so ist das Linienelement der rotierenden Ellipse $= M \cdot d\gamma$. Bezeichnet weiter λ den Winkel eines beliebigen Meridianschnittes mit einer Anfangslage und r den Radius eines Parallelkreises, so ist das Linienelement dieses Parallelkreises $= r \cdot d\lambda$.

Für das Rotationsellipsoid bedeuten dabei

$\gamma =$ Komplement der geographischen Breite φ, $(\gamma = 90 - \varphi)$,

$\lambda =$ geographische Länge.

$$M = \text{Meridiankrümmungsradius} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \cos^2 \gamma)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$N = \text{Querkrümmungsradius} = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}}.$$

Es ist weiterhin

$$r = N \cdot \cos \varphi = N \sin \gamma,$$

so daß die Differenzialgleichung eines Linienelements auf dem Rotationsellipsoid lautet

$$ds^2 = N^2 \sin^2\gamma \cdot d\lambda^2 + M^2 \cdot d\gamma^2 = N^2 \cdot \sin^2\gamma \left(d\lambda^2 + \frac{M^2}{N^2 \cdot \sin^2\gamma} \cdot d\gamma^2 \right).$$

Setzt man

$$\frac{M}{N \sin\gamma} = \frac{d\psi(\gamma)}{d\gamma} \text{ und } N^2 \sin^2\gamma = f(\gamma),$$

so hat man

$$ds^2 = f(\gamma) \left\{ d\lambda^2 + \left(d\psi(\gamma)\right)^2 \right\}.$$

Diese Differenzialgleichung ergibt durch Zerlegung in zwei konjugiert komplexe Zahlen

$$ds^2 = f(\gamma) \cdot d\left\{\lambda + i\psi(\gamma)\right\} \cdot d\left\{\lambda - i\psi(\gamma)\right\}.$$

In analoger Weise möge für das Linienelement der abbildenden Fläche erhalten sein:

$$dS^2 = f_1(v) \cdot d\left\{u + i\psi_1(v)\right\} \cdot d\left\{u - i\psi_1(v)\right\}.$$

Die Konformität der Abbildung bedingt nun die Unabhängigkeit des Vergrößerungsverhältnisses m von der Richtung, d. h. m darf wohl Funktion von u und v, nicht aber von du; $d\psi_1(v)$ sein.

Diese Bedingung wird für

$$\frac{ds^2}{dS^2} = \frac{1}{m^2} = \frac{f(\gamma) \cdot d\left\{\lambda + i\psi(\gamma)\right\} \cdot d\left\{\lambda - i\psi(\gamma)\right\}}{f_1(v) \cdot d\left\{u + i\psi_1(v)\right\} \cdot d\left\{u - i\psi_1(v)\right\}}$$

erfüllt sein, wenn die komplexen Faktoren der rechten Seite von $d\psi_1(v)$ und du unabhängig sind.

Nach der Theorie des Differenzierens von Funktionen komplexer Größen gelten mithin die Bedingungen

$$\frac{\partial\left(\psi(\gamma)\right)}{\partial\left(\psi_1(v)\right)} = \frac{\partial\lambda}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial\left(\psi(\gamma)\right)}{\partial u} = -\frac{\partial\lambda}{\partial\left(\psi_1(v)\right)},$$

d. h. es muß $u \mp i\psi_1(v)$ eine analytische Funktion von $\lambda \mp i\psi(\gamma)$ sein.

Aus

$$\begin{aligned} u + i\psi_1(v) &= F\left(\lambda + i\psi(\gamma)\right) \\ u - i\psi_1(v) &= F_1\left(\lambda - i\psi(\gamma)\right) \end{aligned} \qquad (16)$$

folgt

$$u = \frac{1}{2}\left\{F(\lambda + i\psi(\gamma)) + F_1(\lambda - i\psi(\gamma))\right\}$$

und

$$\psi_1(v) = \frac{1}{2i}\left\{F(\lambda + i\psi(\gamma)) - F_1(\lambda - i\psi(\gamma))\right\}.$$

Die Funktion $F(\lambda, \gamma)$ kann beliebig bestimmt werden. Sind u und $\psi_1(v)$ reelle Größen, dann müssen

$$F(\lambda + i\psi(\gamma)) \text{ und } F_1(\lambda - i\psi(\gamma))$$

zueinander konjugiert sein, d. h. es ist $F = F_1$.

Die konforme Punktübertragung ist dann dadurch gegeben, daß u dem reellen und $\psi_1(v)$ dem imaginären Teil mit Fortlassen des Faktors i gesetzt wird.

Es ist weiterhin

$$\frac{d\{\lambda \pm i\psi(\gamma)\}}{d\{u \pm i\psi_1(v)\}} = \frac{\partial(\lambda \pm i\psi(\gamma))}{\partial u},$$

damit hat man noch für das Vergrößerungsverhältnis

$$\frac{1}{m^2} = \frac{f(\gamma)}{f_1(v)} \cdot \frac{(\partial\lambda^2 + \partial(\psi(\gamma))^2)}{\partial u^2}$$

also m, wie bedingt, lediglich abhängig von der Lage des Punktes.

In Anwendung dieser allgemeinen Entwicklungen auf die in der Landesvermessung gebräuchlichsten Abbildungen des Sphäroids (auf die Kugel, den Kegel und die Ebene) erhält man zunächst:

$$\psi(\gamma) = \int \frac{M \cdot d\gamma}{N \cdot \sin\gamma} = \int \frac{(1 - e^2) \cdot d\gamma}{(1 - e^2\cos^2\gamma) \cdot \sin\gamma}.$$

Die Integration durch Zerlegen in Teilbrüche ergibt:

$$\psi(\gamma) = \int \frac{d\gamma}{\sin\gamma} - \frac{e^2}{2}\int \frac{\sin\gamma \cdot d\gamma}{1 + e\cos\gamma} - \frac{e^2}{2}\int \frac{\sin\gamma \cdot d\gamma}{1 - e\cos\gamma}$$

$$= \lg \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \frac{e}{2}\lg(1 + e\cos\gamma) - \frac{e}{2}\lg(1 - e\cos\gamma)$$

oder

$$\psi(\gamma) = \lg \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{1 + e\cos\gamma}{1 - e\cos\gamma}\right)^{\frac{e}{2}}.$$

Die Entwicklung nach der Breite ψ würde

$$\psi(\varphi) = \lg \operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}} \text{ geben.}$$

Die Differenzialgleichung für das Linienelement auf der Kugel lautet

$$dS^2 = A^2 \sin^2\delta \left(dL^2 + \frac{d\delta^2}{\sin^2\delta}\right) = f_1(\delta) \cdot d\left\{L^2 + \{\psi_1(\delta)\}^2\right\}$$

mit

A = Radius der Kugel,
L = Länge auf der Kugel,
δ = Komplement der Kugelbreite B, $(90 - \delta = B)$

und

$$\frac{1}{\sin\delta} = \frac{d\psi_1(\delta)}{d\delta}.$$

Damit wird

$$\psi_1(\delta) = \int \frac{d\delta}{\sin\delta} = \lg \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$$

oder

$$\psi_1(B) = \lg \operatorname{tg}\left(45 + \frac{B}{2}\right).$$

Als Differenzialgleichung für einen Kegel hat man in Polarkoordinaten (α = Winkel einer Mantellinie gegen einen Anfangsstrahl, ϱ = Abstand eines Punktes von der Spitze)

$$d\sigma^2 = \varrho^2\left(d\alpha^2 + \frac{d\varrho^2}{\varrho^2}\right) = \varrho^2\left\{d\alpha^2 + (d\psi_1(\varrho))^2\right\}.$$

Aus

$$\frac{d\psi_1(\varrho)}{d\varrho} = \frac{1}{\varrho}$$

folgt durch Integration $\psi_1(\varrho) = \lg\varrho$. Nimmt man noch die Differenzialgleichung eines Linienelements in der Ebene

$$d\mathfrak{S}^2 = d\mathfrak{y}^2 + d\mathfrak{x}^2,$$

dann lauten die Abbildungsgleichungen für die Übertragung des Sphäroids

auf die Kugel: $\left\{L + i\lg\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right\}$

oder $\left\{L + i\lg\operatorname{tg}\left(45 + \frac{B}{2}\right)\right\}$ $\Bigg\}$ 17. $=$ $\Bigg|$ $F\left(\lambda + i\lg\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\left(\frac{1+e\cos\gamma}{1-e\cos\gamma}\right)^{\frac{e}{2}}\right)$

oder

auf den Kegel: $\{\alpha + i\lg\varrho\}$ 18.

auf die Ebene: $\{\eta + i\xi\}$ 19. $\Bigg|$ $F\left(\lambda + i\lg\operatorname{tg}\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right.\right.$

Durch Wahl einer geeigneten Funktion wird die Vielheit der Abbildung zur eindeutig bestimmten. Besondere Ausgestaltung hat Gauß der Übertragung vom Sphäroid auf die Kugel gegeben, unter Annahme der Funktionen

$$f(v) = v + i\lg k\,^{16})$$

und

$$f(v) = \alpha v - i\lg k\,^{17}).$$

Ihre Nutzanwendung hat die letztere für die praktischen Belange der Geodäsie vorzügliche Ausarbeitung indessen erst später in der konformen Doppelprojektion der Landesaufnahme gefunden.

3.

Über die Anwendung konformer Abbildungen bei deutschen Landesvermessungen.

Die erste Anwendung konformer Koordinaten stammt ebenfalls von Gauß. Der Auftrag zur Vermessung des damaligen Königreichs Hannover war ja im besonderen der Anlaß zu seiner fruchtbringenden Beschäftigung mit geodätischen Aufgaben, insbesondere auch mit Flächentheorien. Zur Darstellung der Messungsergebnisse hat Gauß für diese, von ihm in den Jahren 1821—1844 durchgeführte Landesvermessung die direkte Übertragung vom Sphäroid in die Ebene gewählt. Eigene Veröffentlichungen über

---

[16]) Vgl. „Allgemeine Lösung“ (Lit.-Verz. Nr. 1).

[17]) Vgl. „Unters. über Gegenstände der höheren Geodäsie“ (Lit.-Verz. Nr. 2).

diese Projektion sind indessen nicht vorhanden. Es sind aber später mehrfach Formeln und Entwicklungen gegeben worden [18]).

Das Wesentliche dieser Projektion ist in den Formeln 5—9 [19]) enthalten, die eine Näherungslösung dieser direkten Übertragung geben. Aus den „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" geht hervor, daß die Übertragung vom Sphäroid auf die Kugel nur geringe Änderungen der sphäroidischen Größen gibt, die in der Ausdehnung bis zu 2° vom Normalparallel ganz vernachlässigt werden können.

Mit dieser Einschränkung folgt die direkte konforme Abbildung in der Ebene unmittelbar aus den Gleichungen 4 und 5

$$\xi = x,$$
$$\eta = y + \frac{y^5}{6r^2}.$$

Aus

$$d\eta = \frac{dy}{\cos\frac{y}{r}}$$

(vgl. S. 11) folgt durch Integration noch

$$\eta = \lg \operatorname{tg}\left(45 + \frac{y}{2r}\right).$$

Damit zeigt sich, daß diese Projektion analog der Mercatorprojektion ist, nur daß hier der Äquator durch den Hauptmeridian ersetzt wird.

Aus vorstehender Gleichung hat man weiterhin

$$e^{\eta} = \operatorname{tg}\left(45 + \frac{y}{2r}\right) = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{y}{2r}}{1 - \operatorname{tg}\frac{y}{2r}}.$$

hieraus folgt nach leichter Umformung

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2r} = \frac{e^{\eta} - 1}{e^{\eta} + 1},$$

---

[18]) Vgl. Lit.-Verz. Nr. 7, 8 und 20.

[19]) Die hier entwickelten Formeln stimmen im wesentlichen überein mit den von Helmert gegebenen. Vgl. Lit.-Verz. Nr. 20 Jahrg. 1876.

durch Erweitern mit $e^{-\frac{\mathfrak{y}}{2}}$ wird weiter

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2r} = \frac{e^{\frac{\mathfrak{y}}{2}} - e^{-\frac{\mathfrak{y}}{2}}}{e^{\frac{\mathfrak{y}}{2}} + e^{-\frac{\mathfrak{y}}{2}}}.$$

Mit Einführung der Hyperbelfunktion ergibt sich danach folgende Übertragungsgleichung

$$\mathfrak{Tang}\frac{\mathfrak{y}}{2} = \operatorname{tg}\frac{y}{2r}.$$

Aus der Gleichung 7 für das Streckenverhältnis folgt noch, daß der Ausdruck

$$m - 1 = \frac{y_m^2}{2r^2}$$

mit dem Quadrat der Entfernung vom Anfangsmeridian wächst. Dieses klassische System konformer Koordinaten ist später durch mehrere Katastersysteme nach Soldnerscher Art ersetzt worden. Eine weitere Anwendung konformer Abbildung zeigt das „Märkische Dreiecksnetz der Preußischen Landesaufnahme", veröffentlicht im Bd. III der Hauptdreiecke 1876 (Lit.-Verz. Nr. 13).

Dieses Netz ist noch in anderer Hinsicht von grundlegender Bedeutung, da mit ihm eine Ausgleichung nach vermittelnder Beobachtung eingeführt wurde. Als Koordinatensystem ist ein ebenes Polarsystem (α, ϱ) gewählt worden, das erhalten wird durch konforme Abbildung des Ellipsoids auf einen reellen Kegel. Als allgemeine Übertragungsformel solcher konischen Abbildung ergab sich nach Gleichung 18:

$$\alpha + i \lg \varrho = F\left(\lambda + i \lg \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{1 + e\cos\gamma}{1 - e\cos\gamma}\right)^{\frac{e}{2}}\right).$$

Um einen geeigneten Ausdruck für die Funktion $F(\lambda, \gamma)$ zu finden, sei bemerkt, daß die Übertragung auf den das Ellipsoid in der Breite $\varphi_0 = (90 - \gamma_0)$ berührenden Kegel im Bild dieses Parallelkreises das Vergrößerungsverhältnis $m = 1$ hat, es ist also

$$\varrho_0 \cdot d\alpha = N_0 \cos\varphi_0 \cdot d\lambda = N_0 \cdot \sin\gamma_0 \cdot d\lambda.$$

Nun ist aber

$$\varrho_0 = N_0 \cdot \operatorname{ctg}\varphi_0 = N_0 \cdot \operatorname{tg}\gamma_0,$$

mithin wird

$$d\alpha = \sin\varphi_0 \cdot d\lambda^{20}) = \cos\gamma_0\, d\lambda;$$

die Integration ergibt

$$\alpha = \cos\gamma_0 \cdot \lambda + C.$$

Die Integrationskonstante bedeutet hierin lediglich eine Verschiebung des Anfangsmeridians und kann fortfallen. Dann beziehen sich α und λ auf den gleichen Anfang.

Die gesuchte Funktion $F(\lambda, \gamma)$ bestimmt sich damit zu

$$\cos\gamma_0\,(\varphi(\lambda, \gamma)) + C,$$

damit ergibt sich weiter

$$\lg\varrho = \cos\gamma_0\left(\lg\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \frac{e}{2}\lg\frac{1+e\cos\gamma}{1-e\cos\gamma}\right) + C.$$

Die Integrationskonstante wird bestimmt durch

$$\lg\varrho_0 = \cos\gamma_0\left(\lg\operatorname{tg}\frac{\gamma_0}{2} + \frac{e}{2}\lg\left(\frac{1+e\cos\gamma_0}{1-e\cos\gamma_0}\right)\right) + C.$$

Es ergibt sich schließlich als Übertragungsformel

$$\lg\varrho = \lg\varrho_0 + \cos\gamma_0\left(\lg\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - \lg\operatorname{tg}\frac{\gamma_0}{2} + \frac{e}{2}\lg\frac{1+e\cos\gamma}{1-e\cos\gamma} - \frac{e}{2}\lg\frac{1+e\cos\gamma_0}{1-e\cos\gamma_0}\right)$$

oder

$$\varrho = \frac{a\cdot\operatorname{tg}\gamma_0}{(1-e^2\cos^2\gamma_0)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left\{\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\left(\frac{1+e\cos\gamma}{1-e\cos\gamma}\right)^{\frac{e}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma_0}{2}\cdot\left(\frac{1+e\cos\gamma_0}{1-e\cos\gamma_0}\right)^{\frac{e}{2}}}\right\}^{\cos\gamma_0}.$$

Wird noch

$$m = \frac{\varrho\cdot d\alpha}{N\cdot\sin\gamma\cdot d\lambda} = \frac{\varrho\cdot\cos\gamma_0}{N\cdot\sin\gamma}$$

entwickelt, so sind damit die Grundformeln für diese Kegelprojektion im wesentlichen charakterisiert.

---

[20]) Dieser Ausdruck stimmt überein mit der Differenzialgleichung der geodätischen Linie in der Breite φ_0.

Für das Bild des Aquators ($\gamma = 90^0$) würde erhalten werden

$$\varrho' = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \gamma_0}{(1 - e^2 \cos^2 \gamma_0)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_0}{2} \cdot \left(\frac{1 + e \cos \gamma_0}{1 - e \cos \gamma_0} \right)^{\frac{e}{2}} \right)^{\cos \gamma_0}}.$$

Damit ergibt sich als Abstand eines Punktes vom Aquator

$$\varrho' - \varrho = \frac{a \sin \gamma_0 \left\{ 1 - \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{1 + e \cos \gamma}{1 - e \cos \gamma} \right)^{\frac{e}{2}} \right)^{\cos \gamma_0} \right\}}{(1 - e^2 \cos^2 \gamma_0)^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{1 + e \cos \gamma_0}{1 - e \cos \gamma_0} \right)^{\frac{e}{2}} \right)^{\cos \gamma_0} \cdot \cos \gamma_0 \right\}}.$$

Wird als Normalparallel der Äquator gewählt, dann wird $\frac{a \cdot \sin \gamma_0}{(1 - e^2 \cos^2 \gamma_0)^{\frac{1}{2}}} = a$. Der 2. Faktor $\left(\frac{f(\gamma_0)}{\psi(\gamma_0)} \right)$ des vorstehenden Ausdrucks nimmt die Form $\frac{0}{0}$ an. Sein wahrer Wert ist $\frac{f'(\gamma_0)}{\psi'(\gamma_0)}$.

Es ist

$$f'(\gamma_0) = -\left(\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1 + e \cos \gamma}{1 - e \cos \gamma} \right)^{\frac{e}{2}} \right)^{\cos \gamma_0} \cdot \lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1 + e \cos \gamma}{1 - e \cos \gamma} \right)^{\frac{e}{2}}$$

$$\psi'(\gamma_0) = -\sin \gamma_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_0}{2} \cdot \left(\frac{1 + e \cos \gamma_0}{1 - e \cos \gamma_0} \right)^{\frac{e}{2}} \right)^{\cos \gamma_0} + \cos \gamma_0 \cdot \frac{d \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_0}{2} \left(\frac{1 + e \cos \gamma_0}{1 - e \cos \gamma_0} \right)^{\frac{e}{2}} \right)^{\cos \gamma_0}}{d \gamma_0}$$

für $\gamma_0 = 90^0$ ergibt sich

$$f'(\gamma_0) = -\lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1 + e \cos \gamma}{1 - e \cos \gamma} \right)^{\frac{e}{2}}$$

$$\psi'(\gamma_0) = -1$$

und

$$\frac{f'(\gamma_0)}{\psi'(\gamma_0)} = \lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1 + e \cos \gamma}{1 - e \cos \gamma} \right)^{\frac{e}{2}}.$$

Damit wird

$$\varrho' - \varrho = - a \cdot \lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{1 + e \cos \gamma}{1 - e \cos \gamma} \right)^{\frac{e}{2}} .^{21})$$

Die Entwicklung nach der Breite würde ergeben

$$\varrho' - \varrho = + a \cdot \lg \operatorname{tg} \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \lg \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right).$$

Das Vergrößerungsverhältnis für diesen Fall folgt aus

$$m = \frac{\left\{ \sin \gamma_0 \cdot (1 - e^2 \cos^2 \gamma)^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot \left\{ \cos \gamma_0 \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\frac{1 + e \cos \gamma}{1 - e \cos \gamma} \right)^{\frac{e}{2}} \right)^{\cos \gamma_0} \right\}}{\left\{ \sin \gamma \, (1 - e^2 \cos^2 \gamma_0)^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot \left\{ \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_0}{2} \cdot \left(\frac{1 + e \cos \gamma_0}{1 - e \cos \gamma_0} \right)^{\frac{e}{2}} \right)^{\cos \gamma_0} \cos \gamma_0 \right\}},$$

worin für $\gamma_0 = 90$, der erste Faktor

$$= \frac{(1 - e^2 \cos^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}}{\sin \gamma},$$

der zweite Faktor

$$= \frac{f_1'(\gamma_0)}{\psi'(\gamma_0)} = \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1 + e \cos \gamma}{1 - e \cos \gamma} \right)^{\frac{e}{2}} \right)^{\cos \gamma_0} \cdot \lg (\cdot::) \cos \gamma_0 - \sin \gamma_0 \left\{ \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1 + e \cos \gamma}{1 - e \cos \gamma} \right)^{\frac{e}{2}} \right\}^{\cos \gamma_0}}{- 1}$$

$= 1$ wird.

Damit folgt

$$m = \frac{1}{\sin \gamma} \cdot (1 - e^2 \cos^2 \gamma)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi} \cdot (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

Man erkennt hiermit, daß der Grenzfall der Kegelprojektion ($\gamma_0 = 90^0$) eine der Mercator-Projektion analoge Abbildung ergibt.

---

[21]) Es ist rechts ein negatives Vorzeichen gewählt, da γ und $\varrho' - \varrho$ in entgegengesetzter Richtung zählen.

Für die praktische Anwendung sind diese Grundgleichungen von Schreiber, dem damaligen Chef der trigonometrischen Abteilung, der diese Projektion einführte, in Reihen entwickelt worden. Zweck dieser Projektion war die Übertragung des Dreiecksnetzes für eine umfassende ebene Ausgleichsrechnung. Die Wahl der Kegelprojektion führt, wie leicht einzusehen, auf Polarkoordinaten, während die rechtwinkligen Koordinaten, die in den Rechnungen einer Landesvermessung allein als vorteilhaft und überlegen gelten können, der Zylinderprojektion eigentümlich sind.

Die Einführung solcher rechtwinkligen Koordinaten in die Rechnungen der Landesaufnahme (ebenfalls von Schreiber stammend) brachte die

„konforme Doppelprojektion".

Auch sie dient lediglich dazu, die umfangreichen Ausgleichsrechnungen zu vereinfachen und übersichtlich zu gestalten. Es wird für das ganze Staatsgebiet ein ebenes, rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt, als dessen x-Achse die Parallele zu dem Hauptmeridian 31° östlich Ferro festgelegt wird. Der Nullpunkt hat die sphäroidische Breite $\varphi_0 = 52° 42' 2{,}5325''$. Auf diese Ebene werden die Punkte, Richtungen und Seiten von dem Ellipsoid durch Vermittlung einer sich dem Ellipsoid anschmiegenden Kugel (Gaußsche Hilfskugel) übertragen, indem zuerst die Übertragung auf die Kugel und von dieser auf die Ebene erfolgt. Nach Erledigung der Ausgleichsrechnung erfolgt die Rückwärtsübertragung, so daß als Endergebnis die geographischen Koordinaten auf dem Ellipsoid erhalten werden.

Diese Doppelprojektion folgt in ihrer ersten Übertragung den von Gauß in seinen „Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie" gegebenen Entwicklungen, die sich mittels der Funktion $f(v) = av - i \lg k$ aus der allgemeinen Abbildungsgleichung ergeben.

Der Radius der Gaußschen Hilfskugel ist gleich

$$A = \sqrt{M_0 N_0}$$
$$\log A = 6{,}8050274003\,.$$

Als sphärische Normalbreite hat Gauß $B = 52^\circ\,40'$ gewählt (entsprechend der sphäroidischen Breite $\varphi = 52^\circ\,42'\,2{,}5325''$).

Die Formeln sind wiederum in Reihen entwickelt und für die praktische Anwendung in einer Hilfstafel [22]) mit dem Argument der Kugelbreite zusammengestellt. Das Argument der Kugelbreite ist gewählt, weil der Übergang von der Kugel zum Sphäroid häufiger sein wird als die umgekehrte Übertragung. Die von Gauß gegebene Hilfstafel ist mit der Kugel-Normalbreite $52^\circ\,40'$ aufgestellt. Sie umfaßt 12°, von $46^\circ\,40'$ bis $58^\circ\,40'$, von Minute zu Minute fortschreitend. Sie gestattet die unmittelbare Entnahme der einer gegebenen Kugelbreite zugehörenden sphäroidischen Breite auf fünf Dezimalen der Sekunde. Damit ist die Breitenübertragung gegeben.

Die Übertragung der vom Hauptmeridian (31° östlich Ferro) gezählten Längen erfolgt durch Multiplikation mit der Konstanten

$$a = \frac{\lambda}{L} = 1{,}00042529\,.$$

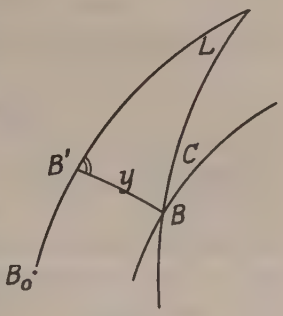


Fig. 6.

Diese erste Abbildung gibt nur geringe Änderungen. Für die Punkte ab III. Ordnung wird sie ganz vernachlässigt, für die Punkte höherer Ordnung kann sie innerhalb des Streifens $50^\circ\,30'$ bis 55° nördlicher Breite ebenfalls fortfallen. Damit bleibt in den meisten Fällen nur die zweite Aufgabe: die Übertragung in die Ebene.

Dazu werden zunächst die Kugelbreite und Länge mittels bekannter Formeln in rechtwinklig sphärische Koordinaten (x, y) umgesetzt.

Es ist

$$\operatorname{tg} B' = \frac{\operatorname{tg} B}{\cos L}$$

[22]) Abgedruckt u. a. in Hegemann, Lehrbuch der Landesvermessung (Lit.-Verz. Nr. 13).

$$x = \frac{B' - B_0}{A}$$

$$\sin \frac{y}{A} = \sin L \cos B .$$

Die ebene Abbildung ist dann gegeben durch $\mathfrak{x} = x$ und

$$\mathfrak{y} = \lg \operatorname{tg} \left(45 + \frac{y}{2A}\right) = y + \frac{y^3}{6A^2} + \frac{y^5}{24A^4} +$$

(vgl. S. 27). Die Gleichung für die Rückübertragung der Ordinatenwerte kann aus der auf S. (28) gegebenen Hyperbelfunktion ermittelt[23]) werden.

Setzt man

$$\operatorname{tg} \frac{y}{2A} = \mathfrak{Tang} \frac{\mathfrak{y}}{2} = v$$

und entwickelt die Tangenzreihe, so ergibt sich

$$\frac{y}{2A} = v - \frac{v^3}{3} + \frac{v^5}{5} +$$

Weiter kann v aus $v = \mathfrak{Tang}\ \frac{\mathfrak{y}}{2}$ in einer Reihe nach $\frac{\mathfrak{y}}{2}$ entwickelt werden, daher hat man

$$v = \frac{\mathfrak{y}}{2} - \frac{\mathfrak{y}^3}{24} +$$

Wird dieser Wert für v in obige Gleichung eingefügt, so ergibt sich

$$\frac{y}{A} = \mathfrak{y} - \frac{\mathfrak{y}^3}{6} + \frac{\mathfrak{y}^5}{24} -$$

Für die logarithmische Rechnung erhält man

$$\log \mathfrak{y} = \log y + \frac{M}{6} \cdot \left(\frac{y}{A}\right)^2 + \frac{M}{36} \cdot \left(\frac{y}{A}\right)^4$$

---

[23]) Schreiber bedient sich für seine Entwicklungen der imaginären Größen. Auf die Verwendung von Hyperbelfunktion wird von Frischauf in seinen Grundlagen hingewiesen (Lit.-Verz. Nr. 3).

und

$$\log\left(\frac{y}{A}\right) = \log \mathfrak{y} - \frac{M}{6}\cdot \mathfrak{y}^2 + \frac{M}{36}\cdot \mathfrak{y}^4$$

Für das Vergrößerungsverhältnis ergibt sich

$$m = \frac{1}{\cos\dfrac{y}{A}} = \mathfrak{Kof}\,\mathfrak{y}\,.$$

Über die geodätischen Bestimmungselemente dieser Projektion geben die Formeln 8 und 9 Auskunft. Man wird damit leicht erkennen, daß die Projektion in dieser Form nur für Rechnungszwecke, nicht aber für Anschluß von Vermessungen geeignet ist, da diese Verzerrungen in einiger Entfernung vom Hauptmeridian Beträge erreichen, deren Vernachlässigung in den Rechnungen der Landesvermessung nicht angängig ist. Das ganze System erstreckt sich etwa 500—600 km beiderseits der Abzissenachse.

Die vorerwähnten Projektionen dienten, abgesehen von der Hannoverschen Landesvermessung, lediglich besonderen Rechnungsverfahren. Für Vermessungszwecke selbst waren sie weder geschaffen noch geeignet. Für diese Arbeiten hatte nur Mecklenburg sich die konforme Abbildung nutzbar gemacht. Ihre Theorie und die Ergebnisse der Vermessung sind niedergelegt in den vier Bänden der „Großherzoglich Mecklenburgischen Landesvermessung“ (herausgegeben vom Ministerium des Innern. Schwerin 1882). Diese Entwicklungen sind später von Prof. Jordan durch Formeln für die unmittelbare Reduktion der Richtungen und Entfernungen vom Sphäroid in die Ebene ergänzt (Bd. 5). Zur besseren Anpassung an die West-Ost-Erstreckung ist eine der Abbildung des Märkischen Dreiecksnetzes analoge konforme Kegelprojektion zur Anwendung gekommen. Paschen hat seine Entwicklungen durch die Form der Funktion $f(v) = v - i \lg k$ aus der allgemeinen Abbildungsgleichung hergeleitet. Es sei hier bemerkt, daß Prof. Hammer in seiner Abhandlung: „Über die Projektion der Mecklenburgischen Landesvermessung“ in der Zeitschrift für Vermessungswesen 1892 S. 417 darlegt, daß dieser Zweck der Anpassung

auf einfacherem Wege auch mit einer schiefachsigen Zylinderprojektion hätte erreicht werden können.

Um die lineare Verzerrung im Süden zu reduzieren, ist der Abwicklungsradius und die Konstante k durch Division verkleinert. Dieses Hilfsmittel bewirkt indessen [24]) lediglich eine Maßstabsänderung, nicht aber die erstrebte Änderung des Vergrößerungsverhältnisses. Diese ungewollt bewirkte Maßstabsänderung ist jetzt bei der Überführung der Mecklenburgischen Landesvermessung in das Einheitssystem [25]) durch Multiplikation der mecklenburgischen Koordinaten mit dem von Paschen gewählten Divisor wieder ausgeglichen worden. Bei dieser Einordnung sind zunächst die Punkte der höheren Ordnung nach dem Helmertschen Verfahren durch Drehung, Verschiebung und Maßstabsänderung in das geographische Einheitssystem eingeformt. Aus diesen geographischen Koordinaten sind dann nach den Krügerschen Formeln die ebenen rechtwinkligen Koordinaten des Meridionalstreifens hergeleitet worden. Von größerem Interesse als diese z. T. bekannten Rechenoperationen ist indessen das für die Punkte der II. und III. Ordnung angewandte Verfahren der direkten Überführung in die ebenen konformen Koordinaten. Dem näheren Eingehen auf diese Entwicklungen sei zunächst die direkte ebene Abbildung vorangestellt.

Diese zugleich als erste konforme Abbildung in einer deutschen Landesvermessung (der Hannoverschen Landesvermessung) zur Anwendung gekommene und in neuerer Zeit wieder besonders beachtete direkte Übertragung in die Ebene verdankt ihre jetzige Ausgestaltung den Arbeiten von Prof. L. Krüger. Seine unter Benutzung der im Nachlaß von Gauß vorgefundenen Notizen und Merkblätter, im übrigen jedoch völlig selbständig entwickelten Theorien und Formeln sind veröffentlicht in der Abhandlung:

---

[24]) Hierauf wird u. a. in der Z. f. V. 1927 S. 325/26 gelegentlich der Besprechung der Überführung der Mecklenburgischen Landesvermessung in das Einheitssystem hingewiesen (vgl. Lit.-Verz. Nr. 20).

[25]) Vgl. Anm. 13.

„Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene“ (vgl. Lit.-Verz. Nr. 4).

Als Abbildungsgleichung einer direkten Übertragung hat man im Anschluß an Gleichung 19

$$(\mathfrak{x} + i\,\mathfrak{y}) = F(\psi(\varphi) + i\,\lambda) \tag{20}$$

Die Funktion F ist durch die Bedingung der längentreuen Abbildung des Hauptmeridians[26]) bestimmt. Bezeichnet x die Länge des elliptischen Meridianbogens vom Ursprung bis zur Breite φ, x' die Länge bis zur Breite φ', dann gilt

$$x = \int_0^{\varphi} M \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} \cdot d\varphi\,; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{M}$$

und

$$x' = \int_0^{\varphi'} \frac{a(1-e^2)\cdot d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}.$$

Daraus folgt, daß φ und somit auch $\psi(\varphi)$ eine bestimmte Funktion von x sein muß:

$$\psi(\varphi) = f(x).$$

Nähert sich ein Punkt auf der Breite φ dem Hauptmeridian bis $\lambda = 0$, dann wird $\mathfrak{y} = 0$ und $x' = x = \mathfrak{x}$. Die Abbildungsgleichung 20 geht in die Form über

$$\mathfrak{x} = F[\psi(\varphi)] = F[f(x)], \tag{21}$$

und damit wird auch

$$(\mathfrak{x} + i\,\mathfrak{y}) = F[f(x) + i\,\lambda] \tag{22}$$

erhalten. Aus Gleichung 21 folgt $F = \frac{1}{f}$, so daß man für Gleichung 22 auch schreiben kann

$$f(\mathfrak{x} + i\,\mathfrak{y}) = f(x) + i\,\lambda.$$

Die Anwendung dieser allgemeinen Abbildungsgleichung setzt die Kenntnis von $f(x)$ voraus.

---

[26]) Krüger setzt hierfür die Bedingung, daß jede Strecke auf der Abszissenachse zu dem entsprechenden Bogen des Hauptmeridians das konstante Verhältnis m_0 hat. Hierdurch wird lediglich eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Bildes bewirkt.

Aus früheren Entwicklungen ist bekannt

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{(1-e^2)\,d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)\cos\varphi} = \lg \operatorname{tg}\left(45+\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}.$$

Krüger setzt

$$\frac{(1-e^2)\cdot d\varphi}{\cos\varphi\,(1-e^2\sin^2\varphi)} = \frac{db}{\cos b}$$

und erhält damit

$$\psi(\varphi) = \lg \operatorname{tg}\left(45+\frac{b}{2}\right) = f(x).$$

Die Beziehung zwischen φ und x vermittelt

$$x = a(1-e^2)\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}.$$

Mit Einführung von

$$n = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}$$

entwickelt Krüger zunächst aus

$$x = \int_0^{\varphi} M\cdot d\varphi$$

$$x = v(n,\ \varphi)$$

und erhält hieraus für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ die Länge des Meridianquadranten

$$\mathfrak{M} = \frac{a\cdot\pi}{2(1+n)}\left(1+\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{64}n^4+\right).$$

Durch weitere Reihenentwicklung ergibt sich schließlich

$$f(x) = \lg \operatorname{tg}\left(45+\frac{b}{2}\right) = \lg \operatorname{tg}\left(45+\frac{1}{2}\psi\right) - \alpha_1\sin\psi - \alpha_2\sin\psi + \ldots$$

mit

$$\psi = \frac{x}{A}\cdot\varrho''; \quad A = \frac{2\,\mathfrak{M}}{\pi}.$$

Die Konstanten α sind dabei bestimmte Funktionen von n. Auf Grund dieser allgemeinen Entwicklung werden dann die Her-

leitungen der für die Anwendung auf alle praktischen Fälle nötigen Gebrauchsformeln gegeben. Zur Anwendung kommt diese Abbildung in der Form von 3° breiten Meridionalstreifen. Jeder dieser Streifen wird mittels der direkten Abbildung auf die Ebene projiziert unter Darstellung der Messungsergebnisse in rechtwinkligen Koordinaten. Die für diese Spezialisierung in Betracht kommenden Gebrauchsformeln und Rechnungen sind in den „Formeln zur konformen Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene“ (vgl. Lit.-Verz. Nr. 5) besonders zusammengestellt.

Für die geodätischen Bestimmungselemente entnimmt man hieraus (S. 35) die Seitenreduktion

$$\log d - \log s = \frac{M}{2} \cdot \left(\frac{y_2 + y_1}{2 r'_m}\right)^2 + \frac{M}{24}\left(\frac{y_2 - y_1}{r'_m}\right)^2 - \frac{M}{12}\left(\frac{y_2 + y_1}{2 r'_m}\right)^4 . \quad (23)$$

Dabei gehört r'_m als mittlerer Krümmungsradius zur Breite B'_m und diese zur Abszisse $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$; d entspricht der Streckenlänge in der Ebene. Setzt man in der Gleichung 8 den Kugelradius $= r'_m$, dann ergibt sich Übereinstimmung zwischen Gleichung 8 und Gleichung 23 bis auf $-\frac{M}{12}\frac{y_m^4}{r^4}$.

Als Genauigkeitsgrade gibt Krüger für

$$s = 75 \text{ km und } y_m = 200 \text{ km}$$

oder

$$s = 100 \text{ km und } y_m = 150 \text{ km}$$

0,5 Einheiten der 8. Dezimalen an.

Die beiden ersten Glieder reichen mit gleicher Genauigkeit für $s = 75$ km

$$\text{bis } y_m = 112 \text{ km}$$

mit 0,5 Einheiten der 7. Dezimalen

$$\text{bis zu } y_m = 212 \text{ km.}$$

Die Richtungsreduktion gibt Krüger in der Form

$$\psi_{1\cdot 2} = \varphi_1 - \varphi_2$$
$$-\psi_{2\cdot 1} = \varphi_1 + \varphi_2 .$$

Mit einer Genauigkeit von 0,04″ bei $s = 75$ km und $y_m = 200$ km (entsprechend 0,01″ bei $s = 75$ km und $y_m = 120$ km) bedeuten dabei

$$\varphi_1 = \frac{\varrho''}{2}\left(\frac{x_2 - x_1}{r'_m{}^2}\right) \cdot y_m$$

$$\varphi_2 = \frac{\varrho''}{12}\left(\frac{x_2 - x_1}{r'_m{}^2}\right) \cdot (y_2 - y_1) .$$

Man sieht daraus, daß die hier entwickelten Gleichungen 7—9 der geodätischen Bestimmungselemente für die Zwecke der Landesvermessungen genügende Genauigkeit geben.

Hinsichtlich der direkten Überführung der Mecklenburgischen Landesvermessung möge nunmehr folgendes nachgetragen werden[27]). In Anlehnung an die in der Tabelle auf S. VI gegebenen Bezeichnungen lautet die Abbildungsgleichung für die ebene Abbildung des Sphäroids in rechtwinkligen Koordinaten (ξ, η)

$$\psi(\varphi) - \psi(\varphi_0) + i\lambda = \psi_1(\varrho) + i\lambda = \psi_1(\varrho_0 - \xi - i\eta)\ ^{28})$$

mit

$$\psi(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{(1 - e^2) \cdot d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \cos \varphi} = \int_0^{\varphi} \frac{M \cdot d\varphi}{N \cdot \cos \varphi}$$

und

$$\psi_1(\varrho) = -\frac{1}{\sin \varphi_0} \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d\varrho}{\varrho} .$$

Nun ist $d\varphi = \frac{dX}{M}$; weiter wird $\int_0^X \frac{dX}{N \cdot \cos \varphi} = f(X)$ gesetzt und damit erhalten (X = Meridianbogen vom Äquator)

$$\psi_1(\varrho_0 - \xi - i\eta) = f(X) - f(X_0) + i\lambda .$$

---

[27]) Die folgenden Entwicklungen stützen sich im wesentlichen auf die in der Z. f. V. 1927 S. 321 gemachten Angaben.

[28]) Diese Abbildungsgleichung ist wohl die erste für die Abbildung in rechtwinkligen Koordinaten. In früheren Werken findet man nur die Abbildung in Polarkoordinaten.

Für die Differenz der Punkte X, λ und X_1, λ_1 wird mit

$$\zeta = \xi_1 - \xi + i(\eta_1 - n)$$

der Ausdruck

$$\psi_1(\varrho_0 - \xi - i\eta - \zeta) - \psi_1(\varrho_0 - \xi - i\eta) = f(X_1) - f(X) + i(\lambda_1 - \lambda) \quad (24)$$

erhalten. Für die Meridionalstreifenprojektion werden für einen Punkt P_1 auf dem Ellipsoid mit den Koordinaten X_1, λ_1 die Koordinaten $x_1 = x + X$, $y_1 = y$, mit X als Abszisse für den Ursprung angenommen. Wird noch $x + iy = z$ gesetzt, dann ergibt sich als Übertragungsformel

$$F(X + z) = f(X_1) + i\lambda_1;$$

für den Ursprung ($z = 0$) ist

$$F(X) = f(X) + i\lambda,$$

mithin erhält man

$$F(X + z) - F(X) = f(X_1) - f(X) + i(\lambda_1 - \lambda). \quad (25)$$

Hierbei bedeutet

$$f(X) = \int_0^X \frac{dX}{N \cos \varphi}$$

übereinstimmend mit der gleichen Funktion in Gleichung 24.

Dadurch ergibt sich aus Gleichung 24 und 25 die direkte Beziehung

$$f(X + z) - f(X) = \psi_1(\varrho_0 - \xi - i\eta - \zeta) - \psi_1(\varrho_0 - \xi - i\eta). \quad (26)$$

Die Konformität der Abbildungen untereinander gestattet eine beliebige Wahl der Richtung für den Differentialquotienten, es wird daher die Meridianrichtung der Kegelprojektion gewählt, d. h. c = konst.

Der Wert des Differentialquotientent ergibt sich aus 26 für

$$\lim z = 0 \text{ und } \lim \zeta = 0$$

$$\text{zu } \frac{dz}{d\zeta} = -\frac{\psi_1'(\varrho_0 - \xi - i\eta)}{f'(X)}$$

$$\left(f'(X) = -\psi_1'(\varrho_0 - \xi - i\eta) \cdot \frac{d\zeta}{dz}\right);$$

für z wird weiter nach der Taylorschen Reihe

$$z = \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=0} \cdot \zeta + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d^2 z}{d\zeta^2}\right)_{\zeta=0} \cdot \zeta^2 + \ldots,$$

wobei $\frac{d^\nu z}{d\zeta^\nu} = h_\nu$ gesetzt wird.

Die Breite für den Ursprung wird dem Normalparallel der Kegelprojektion gleichgesetzt.

Für den Übergang von den rechtwinkligen Koordinaten (ξ, η) zu den Gauß-Krügerschen ergeben sich schließlich mit

$$\eta_1 - n = r \cdot \sin t$$
$$\xi_1 - \xi = r \cdot \cos t$$
$$t + c = \omega$$

die Reihen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{y}_1 &= r \cdot \sin\omega - \sum a_\nu \cdot r^\nu \cdot \sin\nu \cdot \omega \\ \mathfrak{x}_1 &= r \cdot \cos\omega - \sum a_\nu \cdot r^\nu \cdot \cos\nu \cdot \omega \end{aligned}\right\} \text{ bei } \nu = 3{,}4 \ldots,$$

wobei die Koeffizienten a sich von den h nur durch Zahlenkoeffizienten unterscheiden.

Außer in der bisher betrachteten Anwendung zur Darstellung von Messungsergebnissen gibt die konforme Abbildung ein vorzügliches Hilfsmittel für die Rechnungen der höheren Geodäsie. Als Hauptaufgabe der höheren Geodäsie bezeichnet man die Aufgabe, aus der Seite eines sphäroidischen Dreiecks, dem Azimut in einem Endpunkt und dessen Breite, das Azimut im anderen Endpunkte, dessen Breite und den Längenunterschied beider Punkte zu bestimmen. Diese Aufgabe ist von Gauß in seinen „Untersuchungen usw." mittels konformer Projektion gelöst worden.

Im 7. Abschnitt der „Grundlagen usw." gibt Prof. Frischauf ebenfalls eine gleiche Lösung dieser Aufgabe und führt weiterhin die Berechnung rechtwinklig sphäroidischer Koordinaten aus Polarkoordinaten und die Auflösung eines sphäroidischen Dreiecks mittels konformer Abbildung durch.

4.

Vergleichende Untersuchungen über rechtwinklige konforme Koordinaten.

Für die Anlage und Durchführung einzelner Landesvermessungen bestehen im wesentlichen zwei Möglichkeiten

a) die einordnende Anlehnung an eine vorhandene Vermessung von übergeordneter Bedeutung, oder

b) die unabhängige selbständige Ausführung mit eigener astronomischer Orientierung.

Beide Arten sind bei deutschen Landesvermessungen zur praktischen Ausführung gelangt. Für die erste Art gaben die Arbeiten der preußischen Landesaufnahme (jetzt R.-A. f. L.-A.) eine vorzügliche Grundlage. Die Ergebnisse der Landesaufnahme wurden bisher in geographischen und rechtwinklig-ebenen, aus der konformen Doppelprojektion hervorgegangenen Koordinaten veröffentlicht. Da die letzteren für die Zwecke einer Landesvermessung ungeeignet waren, wurde der Anschluß und die Orientierung auf dem Erdellipsoid durch Umrechnung der geographischen Koordinaten geeigneter Punkte in rechtwinklig-sphärische unter Annahme eines günstigen Meridians als Abszissenachse gewonnen. Diese Punkte ergaben das Hauptnetz, die weitere Punktbestimmung erfolgte nach der Methode des „Einschneidens".

Die selbständige Anlage einer Landesvermessung erfordert die Herstellung einer Basis und astronomischen Orientierung. Das Reichsamt für Landesaufnahme gibt jetzt in Verfolg des Beschlusses des Beirats für Vermessungswesen die ebenen konformen Koordinaten der Gauß-Krügerschen Meridionalstreifenprojektion bekannt, die für Anschluß und Einordnung weitmöglichst benutzt werden sollen. Die gewählte Ausdehnung eines Systems auf 3 Längengrade[29]) ergibt für Deutschland eine

[29]) Um nötigenfalls eine breitere Grundlage zu haben, ist nach beiden Seiten eine Überlagerung von $^1/_2{}^0$ vorgesehen.

mittlere lineare Ausdehnung von etwa 105 km beiderseits der Abszissenachse.

Die starre Festlegung des Einzelsystems [30]) nimmt aber den Landesvermessungen die Möglichkeit, durch eigene Wahl einer günstigen Abszissenachse einem bestimmten wichtigen Gebiet (z. B. Zentrum einer Großstadt, hochw. Industrie- oder Bauland und dergl.) die kleinste Verzerrung und damit die größte Genauigkeit innerhalb des Ganzen zu geben.

Besonders jene Gebiete mit eigenen Vermessungen, die beim Einordnen in das Einheitssystem auf das Randgebiet eines Gauß-Krügerschen Teilsystems kommen würden, die somit ihre bisherigen günstig gewählten Verzerrungsverhältnisse gegen die ungünstigsten des Teilsystems einzutauschen gezwungen sind, werden dieses Argument beachten müssen. Wenn auch für unerschlossene, minder wichtige Gebiete die Verzerrung weniger in Betracht kommt, so fordert doch der hohe Wert eines Quadratmeters in den Zentren der Großstädte von mindestens 1000 Goldmark (oft erheblich darüber) unbedingt das Streben nach höchstmöglicher Genauigkeit. Man ist hier gezwungen, mit $^1/_{10}$ qm zu rechnen. Bedenkt man noch, daß die Messungsmethoden in den Großstädten diesem Zweck aufs peinlichste angepaßt sind, so wird man unbedingt fordern müssen, daß die Projektionsverzerrung mindestens der Messungsgenauigkeit entspricht. Sonst wird es nicht verhindert werden können, daß für die Großstädte, die nun zufällig weiter vom Mittelmeridian entfernt liegen, der aus der Projektion entstehende Verzerrungsfehler größer als der bei der Kleinmessung zu erwartende Fehler wird, daß ferner alle Flächenangaben, die sich doch unmittelbar oder mittelbar auf das als richtig unterstellte Koordinatensystem gründen, mit einem Fehler behaftet sind, der im umgekehrten Verhältnis zur sorgsam gehegten Genauigkeit der Messung steht, mithin also unwirtschaftlich wirkt, und der größer ist, als wenn überhaupt kein Koordinatensystem vorhanden wäre.

[30]) Als Mittelmeridiane (x-Achse) der Teilsysteme sind gewählt 6°, 9°, 12° usw. östlich Greenwich.

Als Maximalbetrag der aus der Projektion hervorgehenden Längenverzerrung gilt in den Preußischen Vorschriften $\frac{1}{20000}$ der Länge, d. h. 5 cm auf 1 km. Damit wird die Ausdehnung der bisherigen Soldnerschen Systeme auf etwa $\pm$ 64 km beschränkt. Die jetzt gewählte Anordnung der konformen Systeme gibt für $y = \pm 110$ km als Maximalbetrag $\frac{y^2}{2r^2} = \frac{1}{7000}$, d. h. 14,3 cm auf 1 km. (Die Maximalverzerrung eines Soldnerschen Systems würde den gleichen Betrag erreichen.)

Dieser Betrag erreicht demnach fast das Dreifache der bisher als zulässig erachteten Grenze; gegenüber den nach den preußischen Katasteranweisungen zulässigen Fehlern bei Längenmessungen bleiben sie indessen so gering, daß ihre Berücksichtigung in der Kleinmessung nicht erforderlich ist. Es bleibt aber doch zu bedenken, daß diese Fehlergrenzen sehr weit gehalten sind und für Spezialvermessungen nicht immer genügen. Es sind denn auch hierfür meistens besondere Vorschriften erlassen worden. Die Kleinmessung wird nun, wenigstens in der norddeutschen Tiefebene, durch Doppelmessung und mit Latten eine Genauigkeit von einigen Zentimetern je Kilometer stets hinlänglich erzielen können.

Ungeachtet der Zulässigkeit der obigen Projektionsverzerrung in den Längen, bleibt in allen Fällen noch deren Rückwirkung auf die Flächeninhaltsermittlungen, die letzten Endes immer ein Hauptbestandteil jeglicher Spezialvermessung bilden werden.

Wird eine Fläche als Produkt zweier zueinander senkrechten Strecken (a, b) betrachtet, so ergibt sich der Inhalt zu

$$J = a \cdot b .$$

Mit der Längenverzerrung λ in Richtung der Abszissenachse wird mittels Soldnerschen Koordinaten der errechnete Flächeninhalt

$$\begin{aligned} J &= a(1 + \lambda \cos^2 T) \cdot b(1 + \lambda \cos^2 (T + 90)) \\ &= a\,b\,(1 + \lambda \sin^2 T + \lambda \cos^2 T + \lambda^2 \sin^2 T \cos^2 T) . \end{aligned}$$

Die Flächenverzerrung ergibt sich damit zu

$$v_f = \lambda + \lambda^2 \sin^2 T \cos^2 T$$

und deren Maximum folgt aus

$$v_f' = 2\lambda^2 (\cos^3 T \sin T - \sin^3 T \cos T) = 0$$

für

$$\cos^2 T = \sin^2 T$$

d. h. für

$$T = 45^0 + 2n \cdot R .$$

Damit wird die Maximalflächenverzerrung

$$v_f = \lambda + \frac{\lambda^2}{4}$$

oder in genügender Näherung $v_f = \lambda$, d. h. bei Soldnerschen Koordinaten ist die Maximalflächenverzerrnng gleich der Maximallängenverzerrung. Für die konformen Koordinaten ergibt die analoge Entwicklung

$$J = ab(1 + \lambda)^2 \text{ u. } v_f = 2\lambda + \lambda^2$$

oder in genügender Näherung $v_f = 2\lambda$, d. h. also die Flächenverzerrung ist im ganzen Gebiet gleich der doppelten Längenverzerrung.

Die bei der in Preußen bisher üblichen Ausdehnung Soldnerscher Systeme auf 64 km an den Rändern entstehende Maximalflächenverzerrung von $\frac{1}{20000}$ wird bei Anwendung konformer Koordinaten schon für $\lambda = \frac{1}{40000} = \frac{y^2}{2r^2}$, d. h. bei einer Breite von 52^0 für $y = 45$ km erreicht sein.

Setzt man $v_f = \frac{1}{10000}$, dann reicht (für die Breite 52^0)

$$\text{Soldner bis } y = r\sqrt{\frac{1}{5000}} = 90 \text{ km},$$

$$\text{Gauß bis } y = r\sqrt{\frac{1}{10000}} = 64 \text{ km}.$$

Das Wertverhältnis Soldner : Gauß ist demnach hinsichtlich der

Längenverzerrung gleich 1, hinsichtlich der Flächenverzerrung jedoch zugunsten Soldners $= 45:64 = 64:90 = 2:3$ [31]).

In den konformen Teilsystemen erreicht die Flächenverzerrung den Maximalbetrag $\frac{1}{3500} = 2{,}86$ qm je ha. Wenn auch für rein kartographische Zwecke, denen vorwiegend die Arbeiten der Landesaufnahme nutzbar gemacht werden, die Verzerrungen (14,3 cm je km und 2,86 qm je ha) außer Berücksichtigung bleiben können, so werden doch Spezialvermessungen von hoher Genauigkeit beim Einordnen in das Einheitssystem (besonders an den Randgebieten) eines besonderen Hilfsmittels kaum entraten können.

Nach den Beschlüssen des Beirats kann daher auch für die Randgebiete nötigenfalls der Grenzmeridian als Mittelmeridian gewählt werden.

In dem Runderlaß des preußischen Finanzministers vom 20. April 1927 betr. Änderungen der Bestimmungen über den Anschluß der Einzelmessungen an das Landesdreiecksnetz in Preußen (vgl. Lit.-Verz. Nr. 22) wird für die preußische Katasterverwaltung bei Vernachlässigung der Längenverzerrung die Reduktion der Flächen vorgeschrieben.

Danach gilt als wirklicher Flächeninhalt eines Kartenblattes die durch die große Massenberechnung ermittelte Fläche vermindert um den Betrag der Flächenverzerrung. Die Einzelberechnungen sind auf diesen Inhalt abzustimmen. Ein weiteres Hilfsmittel der Anpassung des Systems an Sonderheiten einer Spezialvermessung, die Einführung eines Vergrößerungsfaktors m_0 für den Anfangsmeridian, wird später noch Gegenstand unserer Untersuchungen sein.

---

[31]) Zu ähnlichem Ergebnis gelangt Jordan auf Grund von Integralentwicklungen auf S. 296 usw. in Bd. 2 des Handb. für Vermessungskunde (1878) (Lit.-Verz. Nr. 12). Dort wird die Ausdehnung eines konformen Systems auf 82% der Fläche eines Soldnerschen Systems beschränkt. Es sei hier aber nochmals bemerkt, daß gerade Jordan trotz dieses Ergebnisses später zum eifrigsten Förderer konformer Koordinaten geworden ist.

Die vorstehenden Feststellungen geben nun wohl Aufschluß über die Genauigkeit in der Abbildung der unter Berücksichtigung der Erdkrümmung bestimmten Größen, wie es in den Aufgaben der höheren Geodäsie, in der Punktbestimmung I. und II. Ordnung, stets üblich sein wird, und lassen das Verhältnis des sphäroidischen Urbildes zu seinem ebenen Abbild erkennen. Anders liegen aber die Verhältnisse in den zu den Hauptaufgaben der Landmessung gehörenden Punktbestimmungen niederer Ordnungen (III., IV., V. Ordnung und Polygonisierung). Als eine wesentliche Aufgabe der Projektion war eingangs charakterisiert, für diese Arbeiten die ebene Rechnung weitgehendst zu ermöglichen. Die Praxis bediente sich denn auch durchweg dieser einfachsten Rechnungsmethode; es muß aber festgestellt werden, daß die Projektion an sich in Soldnerschen Koordinaten eine solche Behandlung geodätischer Aufgaben durchaus nicht zuläßt. Es sei z. B. gegeben in Soldnerschen Koordinaten

$$P_1 : y : + 64\,000{,}00\ m;\ x : + 18\,000{,}00\ m$$
$$P_2 : y : + 60\,000{,}00\ m;\ x : + 22\,000{,}00\ m.$$

In P_1 sei der Winkel $\alpha = 60^0$, in P_2 der Winkel $\beta = 60^0$ zum Punkt P_3 gemessen.

Dann ergibt die bisher übliche ebene Rechnung die Koordinaten von P_3 mit

$$y : + 65\,464{,}10\ m;\ x : + 23\,464{,}10\ m.$$

Die Berechnung unter Berücksichtigung der Erdkrümmung kann erfolgen einmal in sphärischer Rechnung, dann aber offenbar auch in ebener Rechnung nach vorheriger Reduktion der sphärischen Größen mittels der Formeln (1) und (2). Diese Berechnung ergibt für P_3

$$y : + 65\,463{,}92\ m;\ x : + 23\,464{,}28\ \text{m}\ ^{32}).$$

Beide Berechnungen geben Ordinate und Abszisse um 18 cm verschieden.

---

[32]) Vorstehendes Beispiel ist entnommen der Abhandlung „Die Verwendung rechtwinkliger Koordinaten als ebene“ von Samel (vgl. Lit.-Verz. Nr. 24).

Trigonometrisches Formular 5. Abriß.

Zielpunkt	Endgültige Neigungen ν	Beobachtete Richtungen α	$0 = \frac{[\nu - \alpha]}{m}$	Endgültig orientierte Richtungen $\Phi = \alpha + 0$	$v = \nu - \Phi$	Unterschiede gegen die Werte der Katasteranweisung IX		
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
						für Spalte		
	Standpunkt: Lindberg				+ —	2	5	6
Rügge	56° 41′ 15,5″	0	56° 41′ 15,5″	56° 41′ 11,9″	3,6″	— 3,1″	— 1,2″	— 1,9″
Boelschuby	63° 45′ 31,0″	7° 04′ 15,8″	56° 41′ 15,2″	63° 45′ 27,7″	3,3″	— 3,5″	— 1,2″	— 2,3″
Loit		37° 27′ 03,6″		94° 08′ 15,5″			— 1,2″	
Eschelsmark	122° 12′ 10,1″	65° 31′ 05,0″	56° 41′ 05,1″	122° 12′ 16,9″	6,8″	+ 2,9″	— 1,2″	+ 4,1″
		02′ 24,4″	35,8″	47′ 12,0″	6,9″ 6,8″			
		44′ 47,6″	56° 41′ 11,9″					
		47′ 12,0″						

Dieses einfache Beispiel läßt erkennen, welche Fehler bei ebener Rechnung entstehen können. Nun wird sich ja die Punktbestimmung in der Regel nicht in so einfacher Weise vollziehen, sondern es wird stets eine Ausgleichung überschüssiger Beobachtungen erfolgen, die eine teilweise Aufhebung der beregten Verschiebungen mit sich bringen mag. Doch auch hier zeigt ein einfaches, der Praxis entnommenes Beispiel, daß die Projektionsverzerrungen größer sind, als man allgemein anzunehmen geneigt scheint, und daß eine durchweg ebene Rechnung nicht mit den Anforderungen und den Messungsmethoden zu vereinbaren ist.

Vorstehender Abriß einer III. Ordnung ist ebenfalls der in Anm. 32 genannten Abhandlung entnommen. Er ist aufgestellt unter Berücksichtigung der Kugelgestalt. Die letzten Spalten zeigen die Unterschiede dieser Berechnung gegenüber der in üblicher ebener Rechenweise (nach der Katasteranweisung IX) erhaltenen Werte.

Betrachtet man insbesondere den Neupunkt Loit, dessen Richtung um 1,2″ rechnerisch falsch ermittelt ist (bei der Entfernung Lindberg—Loit von 9,5 km einer linearen Verschiebung von etwa 57 mm entsprechend), so wird man auch hier ohne weiteres erkennen können, daß die bisher übliche Art den berechtigten Anforderungen nicht immer gerecht werden kann. Es ist doch offenbar ein Widerspruch, die Punktbestimmung auf 2 (manchmal auch 3) Dezimalen und die trigonometrische Rechnung auf 1/10″ zu führen und Genauigkeitsuntersuchungen anzustellen auf Grundlagen, die durch die Projektion um einige Zentimeter bezw. einige Sekunden falsch gegeben werden. Es wird sich nun zunächst die Frage erheben, innerhalb welcher Grenzen eine ebene Rechnung als ausreichend anzusehen ist. Für die trigonometrische Punktbestimmung ist die Genauigkeit der Richtungsbeobachtungen maßgebend.

Der bei Verwendung Soldnerscher Koordinaten verursachte Fehler ergibt sich nach 3 mit

$$d\,T = \varrho'' \cdot \frac{(x_2 - x_1)}{2\,r^2}\,y_m + \varrho'' \frac{\sin 2\,T}{4\,r^2}\,y_m{}^2 .$$

Das Maximum erreicht für $\sin 2T = 1$, d. h. $T = 45^0$ den Wert:

$$dT = \varrho'' \cdot \frac{x_2 - x_1}{2r^2} y_m + \varrho'' \frac{y_m^2}{4r^2} .$$

Hieraus folgt

$$y_m = \mp (x_2 - x_1) \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + \frac{4r^2 dT}{\varrho''}} .$$

Bei einer Seitenlänge $s = 10$ km wird

$$(x_2 - x_1) = s \cdot \cos 45^0 = 7 \text{ km}$$

und damit für

$$dT = 1'' : y_m = \pm 22 \text{ km} .$$

Bei einer Seitenlänge von $s = 5$ km (IV. Ordnung) wird

$$(x_2 - x_1) = 3{,}5 \text{ km}$$

und damit für

$$dT = 1'' : y_m = \pm 25 \text{ km} .$$

Für die konformen Koordinaten gilt

$$dT = \varrho'' \cdot \frac{x_2 - x_1}{2r^2} \cdot y_m$$

und hieraus

$$y_m = \frac{2r^2 \cdot dT}{\varrho'' (x_2 - x_1)} .$$

Mit obigen Voraussetzungen wird max. $(x_2 - x_1) = 10$ bzw. 5 km; es ergibt sich damit

$$y_m = \pm 40 \text{ km und } y_m = \pm 80 \text{ km}.$$

Dieses Ergebnis läßt die Vorteile konformer Koordinaten für Landesvermessungen deutlich erkennen. Bei Soldnerschen Koordinaten kann die durchgängige ebene Rechnung in der Kleintriangulation nicht befriedigen; die konforme Projektion dagegen wird selbst in der Ausdehnung der jetzt gewählten 3°-Systeme meistens die ebene Rechnung gestatten.

Es zeigt sich hiermit zugleich, daß das 2. Glied der Soldnerschen Reduktion, welches bei Gauß ganz fortfällt, der Hauptträger der Verzerrungen ist.

Die polygonometrische Punktbestimmung erfolgt durch Winkel- und Streckenmessung. Denkt man sich den Polygonzug zwischen

zwei Festpunkten durch den Summenvektor ersetzt, so kann man die durch die Projektion bewirkte Verschiebung dl des Endpunktes als Funktion der Linienverzerrung dS und der dazu senkrecht wirkenden Azimutverzerrung dT dieses Vektors betrachten, mithin

$$dl^2 = dS^2 + \left(\frac{dT \cdot S}{\varrho''}\right)^2$$

setzen. Bei konformen Koordinaten wird

$$dl^2 = \frac{S^2}{4r^4} \cdot y_m{}^2 \{y_m{}^2 + S^2 \cos^2 T\}$$

oder

$$dl = \frac{S}{2r^2} \cdot y_m \sqrt{y_m{}^2 + S^2 \cos^2 T}$$

zum Maximum bei $T = 0^0$.
Der Wert ist dann

$$dl = \frac{S}{2r^2} \cdot y_m \sqrt{y_m{}^2 + S^2};$$

hieraus ergibt sich

$$y = \pm\sqrt{\delta}$$

mit

$$\delta = -\frac{S^2}{2} + \frac{1}{2S}\sqrt{S^6 + 16r^4 dl^2}.$$

Für $y_m = 100$ km wird bei einer Gesamtstreckenlänge des Polygonzuges von etwa 1 km: $dl = 12{,}5$ cm.

Bei Polygonzügen in den Randgebieten kann zur Beurteilung des zulässigen Abschlußfehlers die Berücksichtigung dieser Projektionsverzerrung erforderlich werden.

Im allgemeinen wird man aber bei konformen Koordinaten in der Kleintriangulation und den anschließenden Arbeiten innerhalb des Meridionalstreifens ohne Reduktionen rechnen können. Bei den Soldnerschen Koordinaten konnte, wie obige Untersuchungen zeigen, das gleiche Verfahren innerhalb der bisherigen, wesentlich kleineren Ausdehnung nicht immer befriedigen.

Wenn auch die Flächen- und Längenverzerrung zugunsten Soldners sprach, so bleibt doch im Hinblick auf die weit wichtigere

trigonometrische Punktbestimmung die konforme Projektion erheblich im Vorteil.

Dazu kommt noch, daß die Ermittlung der Reduktionsgrößen bei konformen Koordinaten sich einfacher und leichter gestaltet. Der einfachste Weg einer erforderlich werdenden Berücksichtigung wird sein, die gegebenen sphärischen Stücke (in der trigonometrischen Rechnung die gemessenen Richtungssätze, in der polygonometrischen Rechnung die gemessenen Winkel und Strecken) in die Ebene zu reduzieren.

Der praktischen Anwendung kommen die konformen Koordinaten weiterhin dadurch sehr entgegen, daß ihre Reduktionsformeln gut für graphische Darstellung geeignet sind.

Das Streckenverzerrungsverhältnis $\mathfrak{S} - S = d\,S = S \cdot \frac{y_m^2}{2\,r^2}$ gibt in der Form

$$y_m^2 = \frac{2\,r^2}{S} \cdot d\,S$$

die Gleichung einer Parabel mit $p = \frac{r^2}{S}$. Eine solche Parabel ist in Tafel 1 für $S = 1$ km entworfen, sie gestattet die unmittelbare Entnahme der Längenverzerrung zu einem Ordinatenwert y_m in km. (Für s km Seitenlänge ist der Betrag mit s zu vervielfachen.)

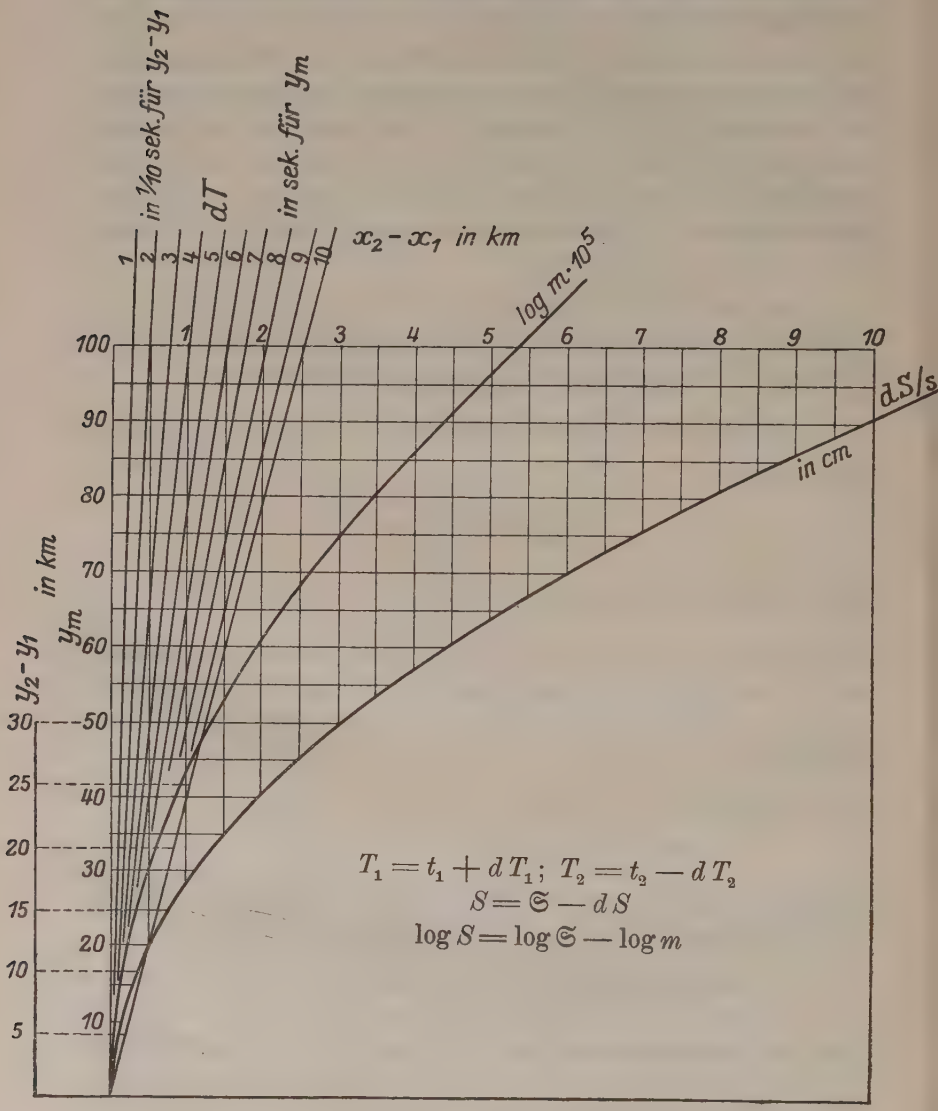
Analog gibt

$$y_m^2 = \frac{2\,r^2}{M \cdot 10^5} \log m \text{ mit } p = \frac{r^2}{M \cdot 10^5}$$

die Parabelgleichung für die logarithmische Differenz (vgl. Tafel 1). Die Gleichung für die Azimutverbesserung

$$(T_1 - t_1)'' = \frac{x_2 - x_1}{2\,r^2} \cdot \varrho'' \cdot y_m - \frac{(x_2 - x_1)}{2\,r^2} \cdot \frac{(y_2 - y_1)}{6} \cdot \varrho''$$

kann mit jedem Summand als Gleichung einer geraden Linie mit dem Richtungskoeffizient $\left(\frac{x_2 - x_1}{2\,r^2} \cdot \varrho''\right)$ angesehen werden (vgl. Tafel 1).



Tafel 1.

Die Tafel ist aufgestellt für eine Breite von 52°. Sie kann aber für ganz Preußen benutzt werden. Die größte Änderung des Querkrümmungsradius bleibt unter 1 km. Der Einfluß bleibt unter 0,01″.

Die Streckenverzerrung ist bei Soldner variabel. Der Maximalbetrag in einem Punkte entspricht der von konformen Koordinaten im gleichen Punkt für alle Richtungen gegebenen Verzerrung.

Man könnte vielleicht geneigt sein, in der gegen die konforme Reduktion abnehmenden Veränderlichkeit einen Vorteil zu sehen.

Mit einiger Mühe wird man aber erkennen, daß eine in allen Richtungen variable Verzerrung eine viel schädlichere Wirkung ausübt als eine gleichmäßige; die erstere belastet gewissermaßen jede Bestimmungsgröße mit einem anderen Wert, während die letztere alle gleichmäßig belastet, die Gewichtsverhältnisse also bestehen und damit das Ergebnis wahrscheinlicher erscheinen läßt.

Ein weiteres Hilfsmittel zur Anpassung des Koordinatensystems an die Einzelmessung bietet die Einführung eines Verzerrungsfaktors m_0 für den Anfangsmeridian, der an sich die Verzerrung $= 1$ hat.

Die durch ein um m_0 verjüngtes Koordinatensystem gegebene Verzerrung gegen das Urbild ist dann $m' = m \cdot m_0$. Bezeichnet a die Abweichung im Anfangsmeridian (m_0) und b die Abweichung im Endmeridian ($m'_x = m_x \cdot m_0$) von der Einheit $m = 1$, dann ist zunächst

$$\frac{1 - m_0}{m_x \cdot m_0 - 1} = \frac{a}{b} = n \text{ oder } m_x = \frac{(1 - m_0) + n}{n \cdot m_0} = \left(1 + \frac{y_x^2}{2r^2}\right).$$

Hieraus wird zunächst

$$m_0\left(n + \frac{n \cdot y_x^2}{2r^2} + 1\right) = 1 + n$$

$$m_0 = \frac{(1 + n) \cdot 2r^2}{2r^2(1 + n) + n \cdot y_x^2}$$

$$\text{und } m_0 = 1 - \frac{n \cdot y_x^2}{2r^2(1 + n)} + \left(\frac{n \cdot y_x^2}{2r^2(1 + n)}\right)^2 - \cdots$$

Wird $n = 1$, d. h. die Verzerrung in der Mitte des Systems soll die Einheit um den gleichen Betrag unterschreiten, um den die Verzerrung an den Rändern die Einheit überschreitet, so ist

$$m_0 = 1 - \frac{y_x^2}{4r^2} + \left(\frac{y_x^2}{4r^2}\right)^2 - \cdots$$

zu wählen. In der Ausdehnung bis 110 km würde damit bei einer Breite von 52°

$$m_0 = 0{,}999\,925\,748$$

und $$m_x' = 1{,}000\,074\,252 .$$

Damit wäre dann die Maximalverzerrung, die an den Randgebieten und in der Mitte auftritt, auf etwa $\frac{1}{13\,500}$ gebracht $\left(\text{bei } m_0 = 1 : \frac{1}{6750}\right)$. Die seitliche Ausdehnung eines Systems unter Festsetzung einer Maximalverzerrung m' ergibt sich aus

$$m' = m \cdot m_0 = m_0 \left(1 + \frac{y^2}{2r^2}\right) = m_0 \left(1 + \frac{y'^2}{m_0^2 \cdot 2r^2}\right)$$

zu

$$y = r \sqrt{\frac{2}{m_0}\{m' - m_0\}}$$

oder

$$y' = r \cdot \sqrt{2 m_0 (m' - m_0)} .$$

Der Abstand $y' = y \cdot m_0$ der Parallelen zur Abszissenachse mit der Verzerrung 1 ist somit

$$y' = r \sqrt{2 m_0 (1 - m_0)} .$$

Für obiges m_0 (bei 110 km) hat damit das Gebiet

$$y = 78 \text{ km die Verzerrung 1.}$$

Die durch Einführung von m_0 zu bewirkende Verschiebung von $m = 1$ gibt die Möglichkeit, das System praktischen Bedürfnissen weiter anzupassen.

Es kann z. B. wünschenswert werden, einem bestimmten Gebiet (hochwertigem Bauland — Großstadtzentren — Industrieland) die Verzerrung 1 zu geben.

Dafür hat man

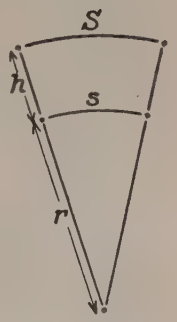
$$m_0 = \frac{2r^2}{y^2 + 2r^2} = 1 - \frac{y^2}{2r^2} + \left(\frac{y^2}{2r^2}\right)^2 - \cdots$$

Soll z. B. dem Gebiet $y = 78$ km die Einheit der Verzerrung zukommen, dann hat man

$$m_0 = 0{,}999\,925\,748\,.$$

Von der Einführung eines Werkes m_0 wird man auch dann vorteilhaft Gebrauch machen können, wenn die Berücksichtigung der Höhenlage eines Landes erforderlich wird.

Der durch die mittlere Höhe h entstehende Projektionsfehler folgt aus



$$\frac{S}{s} = \frac{r+h}{r}$$

oder

$$\frac{S-s}{s} = \frac{h}{r}$$

mit

$$(S-s) = ds = \frac{s \cdot h}{r}\,.$$

Die Projektion der in der Höhe h gemessenen Flächen auf die Normalfläche ist also unmittelbar gegeben durch

$$m_0 = 1 - \frac{h}{r+h}$$

(folgend aus

$$s = S \cdot m_0 = S - \frac{s \cdot h}{r}\Big).$$

5.

Schlußbemerkungen.

Zusammenfassend wird man sagen können, daß bei aller Würdigung Soldnerscher Koordinaten[33]) für die Entwicklung und den Aufbau der deutschen Vermessungswerke der Vorzug sich den konformen Koordinaten zuneigen wird. Bei Vermessungs-

[33]) Hierbei ist natürlich an die Verwendung als ebene gedacht. In sphärischer Behandlung besteht Gleichwertigkeit, abgesehen von der etwas schwierigen Ermittlung der Reduktion.

gebieten mit geringer Ausdehnung sind beide Arten gleichwertig. Mit zunehmender Ausdehnung ist die Flächenverzerrung bei Soldnerschen Koordinaten etwas günstiger, dem steht indessen als weit wichtiger gegenüber, daß die konformen Koordinaten auch in den trigonometrischen Rechnungen die Berücksichtigung der Erdkrümmung bis zu großer Ausdehnung nicht verlangen; dazu kommt noch die Abhängigkeit der Verzerrungen von der Richtung bei Soldnerschen Koordinaten, während die Gleichmäßigkeit der Verzerrung in konformen Koordinaten gewichtserhaltend wirkt und eine erforderliche Berücksichtigung der Verzerrungen begünstigt.

Hinsichtlich der Gauß-Krügerschen Meridionalstreifenprojektion wird man zunächst bedenken müssen, daß es außerordentlich schwierig sein wird, die Vielheit der Forderungen, die an ein für alle Vermessungszwecke gleichermaßen geeignetes System gestellt werden, in einem befriedigenden Mittelweg zu vereinen.

Für vorwiegend kartographische Zwecke genügt die gewählte Anordnung selbst an den Randgebieten allen Erfordernissen; für Spezialvermessungen wird sie indessen nicht immer ohne besondere Hilfsmittel (Flächenreduktion, Einführung von m_0, Wahl des Grenzmeridians zum Mittelmeridian) befriedigen können. Eine Einteilung in 2^0-Systeme wäre deren Wünschen wohl besser entgegengekommen.

Damit hätte aber die Zahl der Systeme erhöht werden müssen, allerdings nur um etwa 2 bis 3. (Der Vorschlag einer solchen Einteilung war auch im Beirat für Vermessungswesen Gegenstand der Beratung.) Man wird aber doch anerkennen müssen, daß mit dem Gauß-Krügerschen Einheitssystem die Grundlage geschaffen ist für eine fruchtbringende Weiterentwicklung des deutschen Vermessungswesens, und es bleibt nur zu erstreben, daß die Spezialvermessungen baldmöglichst ihre Einordnung vollziehen. Einen gewissen erfreulichen Ausblick in dieser Hinsicht gibt ja der bereits erwähnte Runderlaß des preußischen Finanzministers vom 20. April 1927, durch den

Preußen als größter Staat die ebenen rechtwinkligen Koordinaten für amtliche Vermessungswerke einführt.

Der Vollständigkeit halber sei noch die einheitliche Bezifferung des Gauß-Krügerschen Gitternetzes erwähnt. Hauptzweck eines solchen Gitternetzes ist die eindeutige, jegliche Verwechselung ausschließende, jedermann zugängliche und verständliche Festlegung eines Punktes. Die Bezeichnung y und x hat man für diese Zwecke ersetzt durch „Rechts“ und „Hoch“.

Die Zählung der Hochwerte beginnt am Äquator, für Deutschland ergeben sich damit die Werte 5206 km bis 6210 km.

Diese Hochwerte haben nur steigende Zahlengröße. Um das gleiche für die Rechtswerte zu erreichen (d. h. die negativen Werte auszuschalten), zählt man zunächst jedem Mittelmeridian die konstante Größe 500 km zu (d. h. es wird — 51000 = 449000). Damit ist der Punkt innerhalb eines Systems stets eindeutig mit positiven Werten bestimmt.

Für die Angabe des Streifens erhält weiter jeder Mittelmeridian eine Kennziffer, die sich ergibt durch Division der Gradzahl durch 3.

Für die Mittelmeridiane ergeben sich dadurch unter Berücksichtigung der Konstanten die Bezifferungen

$$6^{0} = 2\,500\,000$$
$$9^{0} = 3\,500\,000$$
$$12^{0} = 4\,500\,000$$
$$15^{0} = 5\,500\,000$$
$$18^{0} = 6\,500\,000$$
$$21^{0} = 7\,500\,000$$
$$24^{0} = 8\,500\,000$$

Damit ist ein Bezifferungssystem zur eindeutigen Punktfestlegung gegeben. Die Hochwerte entsprechen den konformen Gauß-Krügerschen Koordinaten, die y-Werte ergeben durch Addition zu der Meridianziffer den eindeutigen, stets positiven Rechtswert.

Das Reichsamt für Landesaufnahme gibt in seinen Veröffentlichungen stets erst den Rechts-, dann den Hochwert an.

6.

Anhang.

Als Beispiel einer Umformung mittels konformer Abbildung mögen aus Jordan, Handbuch für Vermessungswesen Bd. 2 S. 308 bis 312 (6. Aufl.) die beiden Hannoverschen Systeme Göttingen und Celle gewählt werden, sie sind gegeneinander verschwenkt und verschoben, außerdem liegt in beiden eine lineare Verzerrung vor. Ihre gegenseitige Lage ist durch folgende Punkte gegeben:

Punkt	System Göttingen		Celle	
	y	x	y	x
1. Aegidius:	— 13879,790	+ 93575,890	— 23271,813	— 28308,395
2. Wasserturm:	— 16145,760	+ 92808,280	— 25538,488	— 29071,474

Gesucht sind die Koordinaten im System Celle der im System Göttingen gegebenen Punkte

	y	x	
Kunst:	— 17010,553	+ 94967,919	
Tönjesberg:	— 16457,328	+ 91384,373	usw.

Die Reduktion auf Aegidius als Nullpunkt ergibt:

	Göttingen		Celle	
	y	x	y	x
Aegidius:	0,0	0,0	0,0	0,0
Wasserturm:	— 2265,970	— 767,610	— 2266,675	— 763,079
Kunst:	— 3130,763	+ 1392,029		
Tönjesberg:	— 2577,538	— 2191,517	usw.	

Die Rechnung erfolgt im folgenden Schema.

Argument	y x	$\log y$ $\log x$ $\log \operatorname{tg} \varphi$ φ	$\log \sin \varphi$ $\log \cos \varphi$ $\log \varrho$
δ'	— 0,705 + 4,531	9, 84 81 89 0, 65 61 94 9, 19 19 95	9, 18 68 02 9, 99 48 05
Übertrag		351° 9′ 21,5″	0, 66 13 87

Argument		y x	$\log y$ $\log x$ $\log \operatorname{tg} \varphi$ φ	$\log \sin \varphi$ $\log \cos \varphi$ $\log \varrho$
Übertrag	z'	— 2265,970 — 767,610	351° 9′ 21,5″ 3. 35 52 54 2, 88 51 41 0, 47 01 13 251° 17′ 9,1″	0, 66 13 87 9, 97 64 12 9, 50 62 98 3, 37 88 42
	k		99° 52′ 12,4″	7, 28 25 45
Kunst	z_1	— 3130,763 + 1392,029	3, 49 56 50 3, 14 36 48 0, 35 20 02 293° 58′ 16,8″	9, 96 08 27 9, 60 88 25 3, 53 48 23
	w_1	+ 3,657 + 5.455	0, 563 143 0, 736 750 33° 50′ 29,2″	9, 74 57 75 9, 91 93 82 0, 81 73 68
Tönjesberg	z_2	— 2577,538 — 2191,517	3, 41 12 06 3, 34 07 45 0, 07 04 61 229° 37′ 39 3″	9, 88 18 70 9, 81 14 10 3, 52 93 36
	w_2	— 3 291 + 5,587	0, 51 73 79n 0, 74 71 91 329° 29′ 51,7″	9, 70 54 98n 9, 93 53 10 0, 81 18 81

Die Koordinaten im System Celle ergeben sich damit

	y	x
	— 23271,813	— 28308,395
	— 3130,763	+ 1392,029
	— *6,343	+ 5,455
Kunst	— 26398,919	— 26910,911
	(— 26398,919)	(— 26910,911)
	— 23271,813	— 28308,395
	— 2577,538	— 2191,517
	— 3,291	— *4,413
Tönjesberg	— 25852,642	— 30494,325
	(— 25852,643)	(— 30494,325)

Die von Jordan gegebenen Werte sind in Klammer beigefügt.

Für Zwecke untergeordneter Bedeutung läßt sich vorstehende Rechnung wesentlich mittels eines leicht herzustellenden Nomogramms fördern.

In bekannter Schreibform ist

$$z = \varrho_z \cdot e^{i\varphi_z} \text{ mit } \operatorname{tg} \varphi_z = \frac{y_z}{x_z}$$

$$\varrho_z = y_z : \sin \varphi_z = x_z : \cos \varphi_z$$

$$e^{i\varphi_z} = \cos \varphi_z + i \sin \varphi_z$$

$$\log z = \log \varrho_z + i \varphi_z .$$

Damit wird

$$\delta_n = \varrho_k \cdot \varrho_{z_n} \{\cos (\varphi_k + \varphi_{z_n}) + i \sin (\varphi_k + \varphi_{z_n})\}$$

und

$$x_{\delta n} = \varrho_k \cdot \varrho_{z_n} \{\cos \varphi_k \cdot \cos \varphi_{z_n} - \sin \varphi_k \sin \varphi_{z_n}\} = \varrho_k \cdot x_{z_n} \cos \varphi_k - \varrho_k y_{z_n} \sin \varphi_k$$

oder

$$\varrho_k \cdot x_{z_n} \cos \varphi_k - \varrho_k \cdot y_{z_n} \cdot \sin \varphi_k - x\, \delta_n = 0 . \qquad (27)$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich

$$\varrho_k \cdot y_{z_n} \cdot \cos \varphi_k + \varrho_k \cdot x_{z_n} \cdot \sin \varphi_k - y_{\delta_n} = 0 . \qquad (28)$$

Nun lautet die Gleichung eines Punktes in Linienkoordinaten $Au + Bv + C = 0$ und seine schiefwinkligen Koordinaten $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ sind gegeben durch

$$\mathfrak{x} = \frac{A - B}{A + B} \cdot e \text{ und } \mathfrak{y} = \frac{-C}{A + B} .$$

Mit

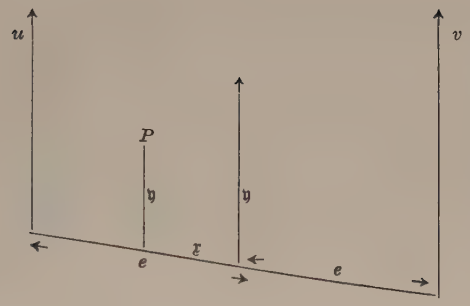
$$u = \frac{x_z}{1000} \text{ und } v = \frac{y_z}{1000} \qquad (29\text{–}30)$$

wird daher für Gl. 27

$$\mathfrak{x} = \frac{\cos \varphi_k + \sin \varphi_k}{\cos \varphi_k - \sin \varphi_k} \cdot e = \operatorname{tg} (45 + \varphi_k) \cdot e = \text{const}$$

(d. h. also die $\mathfrak{y}$-Achse wird parallel der u- und v-Achse im Abstand $\mathfrak{x}$ vom Nullpunkt) und

$$\mathfrak{y} = \frac{x_\delta}{1000\, \varrho_k (\cos \varphi_k - \sin \varphi_k)} = \frac{x_\delta}{1000\, \varrho_k \sqrt{2} \cos (45 + \varphi_k)}$$



oder

$$x_\delta = \eta \cdot f \text{ mit } f = 1000\, \varrho_k \sqrt{2} \cdot \cos(45 + \varphi_k) .$$

Gleichung 28 ergibt auf nämliche Art

$$\xi' = -\operatorname{cotg}(45 + \varphi_k) \cdot e = \text{const} \qquad (32)$$

und

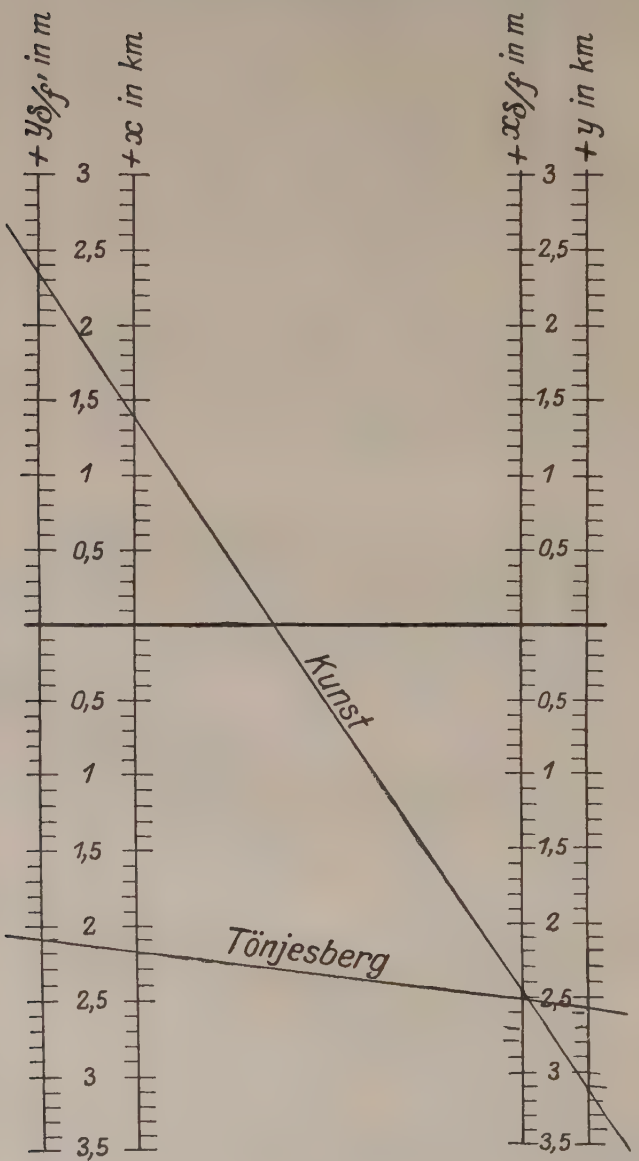
$$y_\delta = \eta \cdot f' \text{ mit } f' = 1000\, \varrho_k \sqrt{2} \sin(45 + \varphi_k).$$

Die graphische Darstellung der Gleichungen 27 und 28 kann nun nach Art der fluchtrechten Punkte erfolgen. Man trägt auf zwei im Abstand $2 \cdot e$ parallelen Geraden als Träger der x_z- und y_z-Werte u und v nach den Gleichungen 29 und 30 auf. Die Verbindungslinie der an sich beliebig zu wählenden Nullpunkte ergibt die ξ-Achse, ihr Mittelpunkt ist der Anfangspunkt des schiefwinkligen Systems. Die zur u Achse parallele Gerade im Abstand ξ vom Nullpunkt ergibt den nach f zu beziffernden Skalenträger für die x_δ-Werte, die Parallele im Abstande der Gleichung 32 gibt die nach f' zu beziffernde Skala für die y_δ-Werte.

Ein solches Nomogramm für obiges Beispiel ist auf Tafel 2 beigefügt. Die Konstanten ergaben

$$\log k = 7{,}28\,25\,45 + i\,(99^\circ\,52'\,12{,}4'')$$
$$\xi = -\,0{,}7036 \cdot e$$
$$\xi' = +\,1{,}4212 \cdot e .$$

Die an den Skalen für x_δ und y_δ entnommenen Werte geben durch Multiplikation mit $f = -\,2{,}21\,68$ bzw. $f' = +\,1{,}5598$ (mittels Rechenschieber!) die gesuchten Koordinaten-Differenzen für


+ y s/s' in m
+ x in km
+ x s/s in m
+ y in km
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
Kunst
Tönjesberg

Tafel 2.

Kunst: $\Delta y : + 2{,}34 \cdot 1{,}56 = + 3{,}65$ (3,66)
$\Delta x : - 2{,}47 \cdot - 2{,}22 = + 5{,}48$ (5,46)
Tönjesberg: $\Delta y : - 2{,}10 \cdot 1{,}56 = - 3{,}28$ (3,29)
$\Delta x : - 2{,}51 \cdot - 2{,}22 = + 5{,}57$ (5,59)

In Klammern ist der Wert der numerischen Rechnung beigefügt.

(Die Multiplikation kann auch leicht durch Bezifferung der x_δ-Achse in Einheit nach f und der y_δ-Achse in Einheit nach f' ersetzt werden.)

Lebenslauf.

Ich bin am 7. Mai 1900 geboren in Drebber (Kreis Diepholz) als Sohn des Postsekretärs Heinrich Röhrs. Am 1. April 1906 siedelten meine Eltern infolge dienstlicher Versetzung meines Vaters nach Bremen über. An der dortigen Oberrealschule legte ich im Juni 1918, als meine Einberufung zum Heeresdienst erfolgt war, die Reifeprüfung ab. Nach $1\,^3/_4$ jähriger praktischer Berufsvorbereitung am Katasteramt Bremen studierte ich vom Sommer-Semester 1921 bis Winter-Semester 1922/23 Geodäsie und Kulturtechnik an der Landwirtschaftlichen Hochschule in Berlin und legte im Frühjahrstermin 1923 die preußische Landmesserprüfung und die umfassendere Prüfung im Fache der Landeskulturtechnik ab. Ich widmete mich weiterhin einem mathematisch-naturwissenschaftlichen Studium an den Universitäten Rostock, Hamburg und Münster, das ich am 15. Juli 1927 durch die Doktorprüfung abschloß. Am 1. April 1926 war ich inzwischen in den höheren Vermessungsdienst der Stadt Bremen eingetreten.

Zu besonderem Dank verpflichtet bin ich Herrn Prof. Schewior, nicht nur für die Anregung zu dieser Arbeit, sondern auch für mannigfache Förderung während meiner Studienzeit in Münster; ebenso danke ich auch Herrn Prof. Dr. R. König für sein freundliches Interesse.